Csillagászati észlelés gyakorlatok II.

Hajdu Tamás & Perger Krisztina

1. gyakorlat

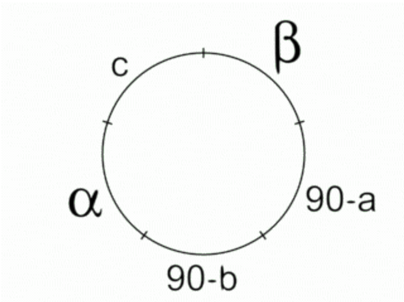
2017. február 23.

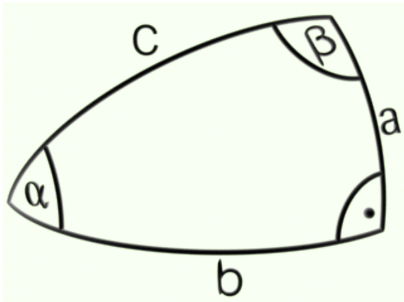
1. Gömbháromszögtan

- gömbi főkör: A legnagyobb sugarú kör a gömbön.
- gömbi szakasz: A gömbi főkör egy része.
- gömbháromszög: Olyan három pont által meghatározott alakzat a gömb felületén, melyek nem egy főkörön vannak.

1.1. Napier-szabály

Derékszögű gömbháromszögekre használható.





Bármely adat koszinusza megegyezik a vele szomszédos két adat kotangensének szorzatával.

$\cos c = \cot\alpha \cdot \cot\beta$

$\cos\alpha = \cot(90-b)\cdot\cot c \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \tan b \cdot \cot c$

$\cos\beta = \cot(90-a)\cdot\cot c \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \tan a \cdot \cot c$

$\cos(90-a) = \cot(90-b)\cdot\cot\beta \quad \rightarrow \quad \sin a = \tan b \cot\beta$

$\cos(90-b) = \cot(90-b)\cdot\cot\alpha \quad \rightarrow \quad \sin b = \tan a \cot\alpha$

Bármely adat koszinusza megegyezik a vele nem szomszédos két adat szinuszának szorzatával.

$\cos(90-a) = \sin\alpha\cdot\sin c \quad \rightarrow \quad \sin a = \sin\alpha\cdot\sin c$

$\cos(90-b) = \sin\beta\cdot\sin c \quad \rightarrow \quad \sin b = \sin\beta\cdot\sin c$

$\cos c = \sin(90-a)\cdot\sin(90-b) \quad \rightarrow \quad \cos c = \cos a\cdot\cos b$

$\cos\alpha = \sin(90-a)\cdot\sin\beta \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \cos a\cdot\sin\beta$

$\cos\beta = \sin(90-b)\cdot\sin\alpha \quad \rightarrow \quad \cos\beta = \cos b\cdot\sin\alpha$

1.2. Szinusztétel

Bármely gömbháromszögre használható.

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$
$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

1.3. Koszinusztétel

Bármely gömbháromszögre használható.

Oldalakra

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$$

Szögekre

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a$$

Szögekre vonatkozó ellenőrzési szabály:

1. Ha $\cos a - \cos b \cdot \cos c > 0$, akkor α az első síknegyedben helyezkedik el.
2. Ha $\cos a - \cos b \cdot \cos c < 0$, akkor α az második síknegyedben helyezkedik el.

1.4. Euler-tételek

1. Az oldalak összege kisebb, mint 360°.

$$0° < a + b + c < 360°$$

2. Bármely két oldal összege nagyobb, mint a harmadik oldal.

$$a + b > c$$

3. Bármely két oldal különbsége kisebb, mint a harmadik oldal.

$$|a - b| < c$$

4. A gömbháromszög belső szögeinek összege 180° és 540° között van.

$$180° < \alpha + \beta + \gamma < 540°$$

5. Bármely két szög összege kisebb, mint a 180°-kal megnövelt harmadik szög.

$$\alpha + \beta < 180° + \gamma$$

6. Ha $a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$. Tehát a nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van. Egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek helyezkednek el.

2. Földrajzi pontok távolsága

Alapképlet:

$$\cos c = \cos(90-\phi_1)\cdot\cos(90-\phi_2)+\sin(90-\phi_1)\cdot\sin(90-\phi_2)\cdot\cos(|\lambda_1-\lambda_2|)$$

Ha mindkét város Greenwich-től ugyanolyan irányban van (tehát mindkettő keletre vagy mindkettő nyugatra), a nagyobb földrajzi hosszúságból vonjuk ki a kisebbet ($\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$).

Ha az egyik keletre, a másik nyugatra helyezkedik el a greenwich-i nullmeridiántól, a két érték összeadódik ($\Delta\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$).

$$\cos c = sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 + \cos\phi_1\cdot\cos\phi_2\cdot\cos\Delta\lambda$$

Ha valamelyik város a déli féltekén helyezkedik el:

$$(90^\circ-\phi)\to(90^\circ+\phi)$$

Valamint figyelni kell arra is, hogy milyen hosszúságon helyezkednek el a városok, mivel a koszinusztételből két távolság is adódik. Általában az egyik rövidebb, mint a másik = megkerüljük a Földet.

1°-os távolság a Földön ≈ 111,2 km.

3. Feladatok

1. feladat

Az ABC gömbháromszög alábbi adatai ismertek:

$\gamma = 90^\circ$

$a = 119^\circ 46'$

$\beta = 52^\circ 25'$

Határozzuk meg a másik három adatot!

Napier-szabály alkalmazásával:

$\cos\alpha = \sin\beta\sin(90^\circ-a) = \sin\beta\cos a$

$\cos\alpha = -0{,}3934$

$\alpha = 113{,}1684^\circ$ vagy $\alpha = 246{,}8316^\circ$

Mivel $\alpha+\beta<\gamma+180^\circ$ feltételnek teljesülnie kell, $\alpha = 113^\circ 12'$.

Szinusztétellel:

$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta}$

$\sin\beta = 0{,}7482$

$\beta = 48{,}4389^\circ$ vagy $\beta = 131{,}5611^\circ$

Napier-szabály alkalmazásával:

$$\cos\beta = \sin\alpha\sin(90° - b) = \sin\alpha\cos b$$

$$\cos\beta = 0{,}6634$$

$$\beta = 48{,}4389° \text{ vagy } \beta = 311{,}561°$$

A két módszer alkalmazása alapján az azonos szög lesz a megoldás, vagyis $\beta = 48°24'$.

Napier-szabály alkalmazásával:

$$\cos c = \sin(90° - a)\sin(90° - b) = \cos a\cos b$$

$$\cos c = -0{,}3293$$

$$c = 109{,}2265° \text{ vagy } c = 250{,}7735°$$

Mivel $a + b > c$ feltételnek teljesülnie kell, $c = 109°12'$.

2. feladat

Az ABC gömbháromszög alábbi adatai ismertek:

$a = 57°22'$

$b = 72°12'$

$\gamma = 94°1'$

Határozzuk meg a másik három adatot!

Koszinusztétellel:

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma$$

$$\cos c = 0{,}1087$$

$$c = 83{,}76° \text{ vagy } c = 276{,}24°$$

Mivel $a + b > c$ feltételnek teljesülnie kell, $c = 83°48'$.

Szinusztétellel:

$$\frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}$$

$$\sin\beta = 0{,}9554$$

$$\beta = 72{,}83° \text{ vagy } \beta = 107{,}27°$$

A szögekre vonatkozó ellenőrzési szabály felhasználásával: $\cos b - \cos a\cos c = 0{,}25 > 0$

$\longrightarrow \beta$ az I. síknegyedben van, vagyis $\beta = 72°48'$.

Szinusztétellel:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}$$

$$\sin\alpha = 0{,}8447$$

$$\alpha = 57{,}64° \text{ vagy } \alpha = 112{,}36°$$

A szögekre vonatkozó ellenőrző tétel alkalmazásával: $\cos a - \cos b\cos c = 0{,}5 > 0$

$\longrightarrow \alpha$ az első síknegyedben van, vagyis $\alpha = 57°36'$

3. feladat

Határozzuk meg Budapest és Caracas távolságát! $\phi_{\mathrm{B}} = 47°30'$ É

$\lambda_{\mathrm{B}} = 19°$ K

$\phi_{\mathrm{C}} = 10°30'$ É

$\lambda_{\mathrm{C}} = 66°55'$ NY

$\cos c = \sin\phi_{\mathrm{B}} \sin\phi_{\mathrm{C}} + \cos\phi_{\mathrm{B}} \cos\phi_{\mathrm{C}} \cos(\lambda_{\mathrm{B}} + \lambda_{\mathrm{C}})$

$\cos c = 0{,}18165$

$c = 79{,}52887°$ vagy $c = 280{,}4659°$

A kisebbik útvonalra van szükségünk, ezért $c = 79°30' \approx 8840$ km.

4. feladat

Határozzuk meg Genf és Moszkva távolságát!

$\phi_{\mathrm{G}} = 46°12'$ É

$\lambda_{\mathrm{G}} = 6°9'$ K

$\phi_{\mathrm{M}} = 55°45'$ É

$\lambda_{\mathrm{M}} = 37°37'$ K

$\cos c = \sin\phi_{\mathrm{G}} \sin\phi_{\mathrm{M}} + \cos\phi_{\mathrm{G}} \cos\phi_{\mathrm{M}} \cos(\lambda_{\mathrm{M}} - \lambda_{\mathrm{G}})$

$\cos c = 0{,}9289$

$c = 21{,}7427°$ vagy $c = 338{,}2572°$

A kisebbik útvonalra van szükségünk, ezért $c = 21°42' \approx 2413$ km.

4. Házi feladatok

1. feladat

Határozzuk meg a gömbháromszög hiányzó adatait, ha a következőket ismerjük:

$a = 136°19'$

$\beta = 62°20'$

$c = 90°$

2. feladat

Határozzuk meg Los Angeles és Belfast távolságát!

$\phi_{\mathrm{LA}} = 34°03'07''$ É

$\lambda_{\mathrm{LA}} = 118°14'34''$ NY

$\phi_{\mathrm{B}} = 54°36'$ É

$\lambda_{\mathrm{B}} = 5°55'$ NY