Szabó Róbert

# Az RR Lyrae instabilitási sáv numerikus modellezése

**doktori értekezés**

**Eötvös Loránd Tudományegyetem**
Fizika Doktori Iskola, Részecskefizika és Csillagászat program

Doktori Iskola vezető: **Dr. Horváth Zalán**, egyetemi tanár
Programvezető: **Dr. Pócsik György**, egyetemi tanár
Témavezető: **Dr. Kolláth Zoltán**, az MTA doktora,
tudományos igazgatóhelyettes, MTA KTM CsKI

**Magyar Tudományos Akadémia**
**Konkoly Thege Miklós Csillagászati Kutatóintézete**

Budapest, 2004. február

# Tartalomjegyzék

*E munkát*
*Feleségemnek, Eszternek*
*és minden közös erőfeszítésünknek*
*ajánlom.*

# 1. fejezet

# Bevezetés

*„At first sight it would seem*
*that the deep interior*
*of the sun and stars*
*is less accessible*
*to scientific investigation*
*than any other region of the universe.”*

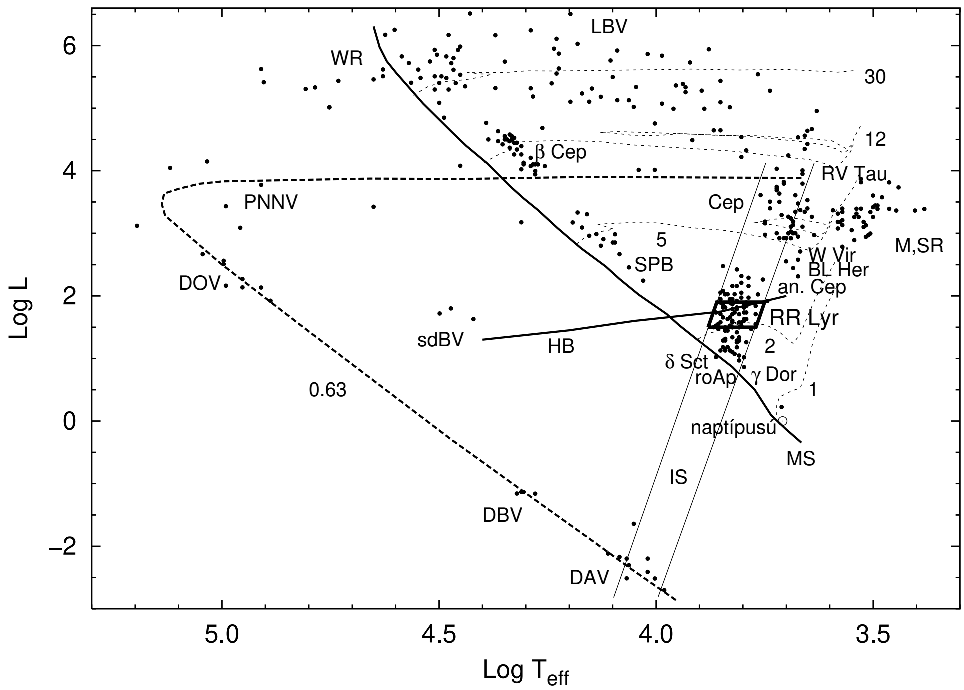
**Sir Arthur Stanley Eddington**
The Internal Constitution of the Stars, 1926

## 1.1. Pulzáló változócsillagok

A csillagok jelentős része változócsillag, abban az értelemben, hogy emberi időskálán változtatja valamely fizikai állapotjelzőjét vagy tulajdonságát; ez lehet egy jól definiált hullámhossztartományban mért fényesség, a radiális sebesség, hőmérséklet, de akár a mágneses tér is. A csillagok legfontosabb diagramjának, a Hertzsprung–Russell-diagramnak[1] nagy részén megtalálhatjuk a fényességüket is változtató, *pulzáló* változócsillagokat (**1.1** ábra).

A klasszikus instabilitási sávban helyezkednek el a $\delta$ Scuti, az RR Lyrae csillagok, valamint a cefeidák, hogy csak a legfontosabb típusokat említsük. A nekik megfelelő fejlettségi állapot a fősorozat/szubóriás ág, a horizontális ág, illetve az aszimptotikus óriáság. A hosszú periódusú mirák (M) és félszabályos (SR) változók a klasszikus instabilitási sáv alacsony hőmérsékletű

[1]HRD-n eredetileg a spektráltípus – abszolút fényesség diagramot értjük, de a dolgozatban a vele topológiailag ekvivalens effektív hőmérséklet – luminozitás diagramot használjuk.




1.1. ábra. A pulzáló változócsillagok különböző típusainak elhelyezkedése a Hertzsprung–Russell-diagramon, [49] 1. ábrája alapján. A vastag vonalak a horizontális ágat (HB) és a szoláris fémtartalmú fősorozatot (MS) jelölik. Néhány fejlődési görbét szaggatott vonallal és a naptömeg-egységben mért tömeggel jeleztünk. Egy jellemző poszt-AGB fejlődési útvonal mutatja a fehér törpe hűlési útvonalat (0,63 $M_\odot$). A vékony vonallal jelölt ferde zóna a klasszikus instabilitási sáv (IS). Csak néhány egyedi objektumot tüntettünk fel (fekete pontok), így a pontok sűrűsége nem tükrözi az egyes típusok relatív populáltságát. Külön kiemeltük az RR Lyrae csillagok tartományát.

(vörös) szélénél kisebb hőmérsékletnél helyezkednek el, viszonylag nagy luminozitásnál. Szabálytalan, sőt kaotikus pulzáció jellemzi a W Vir – RV Tauri csillagok tartományát.

Az instabilitási sáv önkényes meghosszabbítása a fehér törpék hűlési görbéjét is metszi, itt találjuk a hidrogénben gazdag, pulzáló DA fehér törpéket (más néven ZZ Ceti változókat). A fehér törpék még két helyen találkozhatnak fejlődési útjuk során pulzációs instabilitással: a héliumban gazdag légkörű DB degenerált csillagok $\log T_{\mathrm{eff}} = 4.3 - 4.4$ körül és a forró DO fehér törpék $\log T_{\mathrm{eff}} = 5.0$ környékén. A poszt-AGB szakaszban, planetáris köd centrális csillagaként (PNNV) is pulzálhat a forró csillagmaradvány.

A fősorozat mentén a nagyobb tömegű csillagok több csoportja is pulzál, így a $\beta$ Cephei és a lassan pulzáló B csillagok (SPB). A legnagyobb luminozitással a fényes kék változók (LBV) bírnak, míg a Wolf-Rayet csillagokban

(WR) is szerepet játszhat a pulzáció.

Lehetnek még máig ismeretlen pulzáló változócsillagok-típusok is a HRD-n, amit a '90-es évek végén felfedezett ultrarövid periódusú, több módusban pulzáló sdBV csillagok esete mutat; szintén az ezredfordulón sikerült a naptípusú oszcillációt mutató csillagok első képviselőit megismernünk; először a fősorozaton, majd az elfejlődött "napok" között is, stb.

Számunkra a továbbiakban a klasszikus instabilitási sáv lesz fontos, ahol a $\kappa$-mechanizmus felelős a csillagok pulzációjáért. A hidrogén, valamint a hélium első és második parciális ionizációs zónája játsszák a fő szerepet a gerjesztésben. Itt ugyanis az opacitás ($\kappa$) nagyon erősen függ a hőmérséklettől. Ekkor a kompressziós fázisban az opacitás nő az ionizáció miatt, így a kinetikus energia növekedik ezen zónákban a sugárzási energia rovására, s az expanziós fázisban disszipálódik ez az energia. Más helyeken ennek épp a fordítottja játszódik le. Egy adott rezgési módus egy pulzációs ciklusára kiszámítható a lokális körfolyamatok energiamérlege. A csillag adott pulzációs módussal szembeni stabilitását ez a teljes csillagra felösszegzett munkaintegrál határozza meg. A klasszikus instabilitási sávban ez a folyamat gerjeszti a megfigyelt pulzációt. A többi helyen hasonló mechanizmusok gerjesztenek, pl. az oxigén vagy a szén részleges ionizációja felelős a PNNV és DOV csillagok pulzációjáért. A naptípusú oszcillációnál a nemradiális módusokat azonban a konvekció keltette akusztikus zaj gerjeszti (sztochasztikus gerjesztés).

Elvileg az instabilitási sáv kék szélét jól tudjuk modellezni; itt a parciális ionizációs zónákat egyre kijjebb találjuk a csillagon belül, és végül nem lesz hatékony a gerjesztés. Nehezebb feladatnak tűnik a vörös szél kiszámítása, ahol az egyre kiterjedtebb konvekciós zóna csökkenti a $\kappa$-mechanizmus hatékonyságát, visszahatva a pulzációra, ezáltal határozza meg az instabilitás határát. Azonban kiderül, hogy ez az egyszerű kép nem elégséges sem a cefeidáknál, sem az RR Lyrae csillagoknál az instabilitási sáv tulajdonságainak magyarázatára (**4.2.** fejezet, [44], [67]).

## 1.2. Az RR Lyrae csillagok és modellezésük

A XXI. század küszöbét átlépve kijelenthetjük, hogy a változócsillagok vizsgálata mind az elméleti, mind a megfigyelési oldalt tekintve reneszánszát éli. Közrejátszik ebben a megfigyelési technikák (detektorok, digitális képfeldolgozás, számítástechnika) fejlődése éppúgy, mint a látványos, sokszor más asztrofizikai – kozmológiai kérdés megválaszolására indított hatalmas égboltfelmérő földi programok, és a tervezett vagy már zajló űrmissziók óriás és homogén adattömegének pozitív hatása is.

Egy másik, korábbi hőskor a fotografikus megfigyelési technika elterjedésével vette kezdetét, s ez szorosan összekapcsolódik a dolgozatomban részletesen vizsgált pulzáló változócsillag típus, az RR Lyrae csillagok történetével: az 1890-es években azonosították őket, elsőként gömbhalmazokban (S. I. Bailey). Később gömbhalmazokon kívül is megtalálták reprezentánsaikat, ma pedig több ezer képviselőjük ismeretes a szomszédos galaxisokban és a hozzájuk tartozó gömbhalmazrendszerekben.

Az RR Lyrae csillagok kis tömegű, II. populációs objektumok, melyek a horizontális ágon helyezkednek el a Hertzsprung–Russell-diagramon (HRD). Három fő típusukat különböztetjük meg fényváltozásuk, illetve a pulzáció módusa szerint. Az *RRab* változók alapmódusú pulzátorok, meredek felszálló ággal, $0,3-1,2$ napos periódussal, $\Delta V = 0,5-2,0^{mag}$ amplitúdóval, míg az *RRc*-k az első felhangban rezegnek szimmetrikus, néha szinuszos fénygörbével, $0,8^{mag}$-nál kisebb amplitúdóval és $0,2-0,5$ napos periódussal. Harmadik típusukat a kétmódusú csillagok alkotják (*RRd)*, melyek frekvenciaspektrumában hosszú távon mindkét rezgési módus jelen van (GCVS[2] [64]). Megemlítjük még a legrövidebb periódusú RR Lyrae csillagokat, melyek jelölésére az *RRe* jelölés terjedt el. Ezek vagy az első, vagy a második felhangban rezegnek, de ez utóbbi feltételezést mind ez idáig nem sikerült modellszámításokkal alátámasztani. A csillagtípus újabb, a fénygörbe- és frekvenciaspektrum jellegzetességeire épülő finomabb osztályozása kapcsán irodalmi forrásokra utalunk ([71], [2]).

A horizontális ági pulzáló változócsillagok különös jelentőséggel bírnak az elmúlt száz év asztrofizikájában. A fősorozati csillagokhoz képest nagyobb abszolút fényességük, és annak viszonylag kis diszperziója révén Galaxisunk és alkotórészei (főként a gömbhalmazok, a bulge és a haló), valamint a közeli extragalaxisok (Magellán-felhők, törpe szferoidális galaxisok) távolságának meghatározására és felépítésük, kialakulásuk vizsgálatára is alkalmasak [97], [92], [93], [96], [21], [24], [75], [74], [8], [19], [105], [86], [23]. Ez már önmagában is elég volna a tanulmányozásukhoz, hiszen a kozmikus távolságskála a Galaxisunkban kalibrálható módszerekre, illetve a Lokális csoportbeli galaxisok távolságára épül. Azonban további érdekességeket is tartogat az RR Lyrae csillagok Galaxisunkon belüli eloszlásának vizsgálata. Példaként említjük, hogy Galaxisunk éppen szétszakítja, gyűrű alakú pályára szórja, és magába olvasztja a Sagittarius szferoidális törpegalaxist [56], [57], [58], [81], s ezt többek között az RR Lyrae csillagok éggömbre vetített felületi számsűrűségének lokális növekedésével sikerült kimutatni, illetve igazolni.

Ezen eredmények mellett az RR Lyrae csillagok pulzációjának tanulmányozásától elsősorban is a kis tömegű csillagok szerkezetének, a bennük lejátszódó folyamatoknak (konvekció), horizontális ági fejlődésének [61], [22],

[2]A legfontosabb rövidítések megtalálhatók a *Rövidítések jegyzékében.*

illetve magának a pulzációnak jobb megértését remélhetjük [50], [71]. A pulzáló változócsillagokból nyerhető információmennyiség akkor aknázható ki legalaposabban, ha a bennük érvényes fizikai törvényszerűségeket alkalmazva megpróbáljuk működésüket modellezni. A kapott eredményeket összehasonlítva a megfigyelhető fizikai paraméterekkel, illetve a modellparamétereket hangolva, megfelelő egyezés esetén tesztelhetjük a csillagokról alkotott fizikai képünk érvényességét, illetve az alkalmazott közelítések jogosságát. Végső soron információt nyerhetünk, – szinte kizárólagos módon – a csillagok belsejéről. Megemlítendő, hogy pontosan így, a cefeidák pulzációjának vizsgálatára alapozva kellett az opacitás adatokat revideálni a '90-es évek közepén.

A. A. Ritter volt az első, aki egyes változócsillagok periodikus fény- és radiálissebesség-változását a csillagok belsejében végbemenő fizikai folyamatokkal magyarázta. A pulzációelmélet alapjait A. S. Eddington, S. Rosseland és P. Ledoux rakták le a XX. század első felében. Érdemes néhány sorban bemutatni a pulzációelméletben alkalmazott numerikus technikák fejlődésének főbb állomásait. Az első vizsgálatok adiabatikus, lineáris elméleten alapultak. Ha a pulzációt gerjesztő és csillapító mechanizmusokat is figyelembe akarjuk venni a csillagbelső különböző részein, akkor nemadiabatikus feladattal állunk szemben. Ilyenkor óhatatlanul numerikus módszerekhez kell folyamodnunk. A pulzációt gerjesztő $\kappa$-mechanizmus a klasszikus pulzáló változócsillagok (RR Lyrae, cefeida) esetében a linearizált egyenletek megoldásával is vizsgálható [36], [6]. A gyenge nemadiabacitás miatt a periódusok nagy pontossággal adódnak [37], [25]. Reális amplitúdókat azonban csak akkor kapunk, ha nem ragaszkodunk a linearitáshoz. Ezen kutatásokban úttörő szerepet játszott R. F. Christy és A. N. Cox, akik a '60-as évek mai szemmel nézve kezdetleges számítógépein modellezték a radiális pulzációt, és először alkalmaztak numerikus hidrodinamikai szimulációt a probléma kezelésére. Stellingwerf [100] relaxációs módszerével jelentősen egyszerűsítette a problémát, és lehetővé vált a nemlineáris határciklusok stabilitásvizsgálata. Később a meglévő módszerek számos finomítása látott napvilágot (pl. adaptív rácsok), de a máig használt kódok alapjai ekkorra már kiforrottak.

A '80-as évekig csak radiatív modellek léteztek, vagyis ahol az energiatranszfert egyedül a sugárzás szolgáltatja. Legnagyobb hiányosságuk – azon túl, hogy a konvekciót nem veszik figyelembe – az, hogy működésükhöz mesterséges viszkozitást kell feltételezni. Fizikailag megalapozottabbak, ugyanakkor a legnagyobb numerikus apparátust igénylik a turbulens konvekciót is tartalmazó, nemlineáris, nemadiabatikus kódok [14], [46], [68]. Az utolsó igazi áttörést a radiális pulzáció numerikus modellezésében éppen ezek a módszerek szolgáltatták a '90-es évek második felében, mert természetes módon vezetnek kétmódusú megoldásokhoz [45], [65], és ezzel hosszú ideig megoldatlan kérdést sikerült tisztázni. Sajnos ezeket a módszereket egyelőre csak radiális (egydimenziós) esetre sikerült megvalósítani, s nagyon egyszerű algoritmussal írják le a turbulens konvekciót. Ezenkívül a felmerülő szabad paraméterek kalibrálása a fő bizonytalansági tényező.

## 1.3. Pulzáció és csillagfejlődés

A csillagpulzáció azt az egyedülálló eszközt adja a kezünkbe, amivel a csillagok belsejét vizsgálhatjuk, az ottani fizikai állapotokra vonatkozó elméleteinket ellenőrizhetjük; mindezt a szeizmológiában használt apparátussal tehetjük. A '80-as években a Nap rezgéseinek tanulmányozására (helioszeizmológia) kifejlesztett elméleti és gyakorlati módszereket a többi csillag esetére is szeretnénk kiterjeszteni (aszteroszeizmológia). Ezekben az esetekben főként a nemradiális pulzációt használjuk a csillagbelső letapogatására, ahol azonban a gerjesztési és csillapodási folyamatok, vagyis a móduskiválasztás nem kellően tisztázott. Számos légkörön túli eszköz működik már most, vagy kapcsolódik be a csillagszeizmológiai megfigyelésekbe a közeli jövőben (WIRE [18], MOST [113], COROT [5], Eddington [3] [91] azonban a megfigyelések pontos értelmezéséhez magát a pulzációt a lehető legjobban kell ismernünk. A hosszú ideje megválaszolatlan, vagy nem kellő alapossággal vizsgált problémákat megtalálhatjuk a radiális pulzáció témakörében is. Mivel egydimenziós esetben a jelenségek egyszerűbben tárgyalhatók, remény van arra, hogy olyan módszereket dolgozhatunk ki és olyan összefüggéseket tárhatunk fel, melyek a nemradiális esetben is sikerrel alkalmazhatók lesznek. A dolgozatban ismertetett elméleti vizsgálataimat és eredményeimet ilyen kérdések köré csoportosítottam.

Mivel a csillagok fejlődését – kevés kivételtől eltekintve – nem áll módunkban megfigyelni, nagy kihívást jelent a fejlődés közvetett megnyilvánulásainak tetten érése (pl. [61]). Hasonlóan érdekes a csillagfejlődés és a pulzáció kapcsolatának vizsgálata a nemlineáris dinamika szempontjából. A fejlődés következtében felléphet a pulzációs módus megváltozása, de változhat a rezgés periódusa és az amplitúdója is. A csillagfejlődés és a pulzáció együttes, konzisztens modellezése azonban a két jelenség eltérő időskálája miatt ma még kivitelezhetetlen. Ennek belátásához elég, ha meggondoljuk, hogy egy RR Lyrae csillaghoz rendelhető dinamikai időskála egy nap nagyságrendjébe esik, míg a fejlődési karakterisztikus ideje mintegy $10^6$ év. Ezért egyszerűsítő feltételezésekkel kell élnünk. A pulzációs és fejlődési modellszámítások nem szükségszerűen ugyanazt a fizikát, ugyanazokat a hatásokat tartalmazzák, továbbá eltérő elhanyagolásokat, egyszerűsítéseket használnak. Ezt is figye-

[3] Az Eddington missziót az ESA 2003. november 5-én törölte.

lembe véve, amíg az együttes modellezés nem valósul meg, addig a következő lehetőségek adódnak:

1. Ha mégis a fejlődés és a pulzáció együttes hatását kívánjuk vizsgálni, akkor például reális feltételezésekkel a fejlődést felgyorsítva érhetjük el a kívánt hatást [39].

2. Egyes esetekben (például módusváltás) az amplitúdóegyenlet formalizmusa segítségével egyszerűsíthetjük a problémát. A fejlődés jelentős, nem várt szerepére derült fény itt ezzel a módszerrel [16].

3. Eltekintünk a két folyamat egymásra hatásától, elkülönülten kezeljük őket, így csak a módusszelekció mechanizmusán keresztül lép fel a fejlődés hatása. Bizonyos esetekben ez is célravezető lehet.

Dolgozatomban a második, és főként a harmadik módszert követem az instabilitási sáv modellezése kapcsán, és a kétmódusú csillagok vizsgálatának bizonyos aspektusait tekintve.

Az egyik fontos kérdés az RR Lyrae csillagok esetén az alapmódus magas hőmérsékletű, azaz *kék széle* esetében talált ellentmondás az empirikus, illetve az elméleti eredmények között. Az alapmódusú csillagok megfigyelhető fénygörbe-paraméterei (periódus, amplitúdóarányok és fáziskülönbségek a Fourier-felbontásban) kapcsolatba hozhatók a szóban forgó csillagok fizikai paramétereivel *empirikus relációk* és sztatikus atmoszféramodellek segítségével. Az effektív hőmérséklet–luminozitás diagramon az így kapott kék szél lineáris, s meredeksége sokkal kisebb a radiatív és konvektív lineáris modellekből kapható kék szélénél [67].

A probléma nem új keletű [90]. Annak ellenére nem sikerült megoldani, hogy mintegy 30-40 évvel ezelőtt a héliumtartalom meghatározásában szántak nagy szerepet a kék széleknek [25], [55]. Akkoriban a kérdés az volt, hogy volt-e primordiális hélium vagy nem. Minthogy a hélium ionizációs zónája szerepet játszik az instabilitási sáv kék szélének meghatározásában, a remény az volt, hogy megbecsülhetjük a csillag héliumtartalmát. Stellingwerf [101] azonban kimutatta, hogy a konvekciót is figyelembe véve a kék szélek héliumtartalomtól való függése jelentősen kisebb, mint korábban gondolták. Így – bár a kérdés továbbra is megoldatlan maradt –, a megoldására fordított erőfeszítés jelentősen csökkent.

Mivel a lehetséges fizikai hatások (rotáció, kémiai összetétel, radiatív transzfer stb.) szisztematikus vizsgálata sem hozott változást e téren, felmerült, hogy a csillagfejlődés okozhat-e ilyen hatást. Többek között ezt a problémát vizsgálom a dolgozatomban. A kérdés eldöntéséhez nagy mennyiségű, a teljes paramétertartományt lefedő nemlineáris modellsorozat számítását végeztem el. A módusszelekció mechanizmusát a turbulens konvekciót is tartalmazó Florida–Budapest kód segítségével konzisztensen vizsgálva, mindezt horizontális ági fejlődésre vonatkozó számítások eredményeivel kiegészítve, a megfigyelésekkel jobban egyező eredményt értem el. Megmutattam, hogy a csillagfejlődés nem hagyható figyelmen kívül az instabilitási sáv modellezésekor, mert bizonyos tartományokban, ahol kétféle pulzáció is előfordulhat (alapmódus/felhang, alapmódus/két módus) a kezdeti feltételek, így a fejlődés iránya szabja meg a megfigyelhető pulzációs módust, ezáltal befolyásolva az instabilitási sáv topológiáját. Ezen felül a csillagfejlődés vezérli a HRD benépesülését, ezáltal kiválasztási effektusok révén is módosítja az instabilitási sáv megfigyelhető szerkezetét.

Az RR Lyrae instabilitási sávval kapcsolatos probléma megoldása több szempontból is előremutató. Az RR Lyrae csillagok alapvető mérföldkőnek számítanak a kozmikus távolságskála kalibrálásában, ezenkívül csillagfejlődési elméletek előszeretettel használt tesztalanyai. Ezért rendkívül fontos, hogy ellenőrizzük az empirikus relációkat, és ha lehet, független módon megerősítsük őket. A felvázolt probléma kiváló alkalmat ad erre. Másrészről a csillagok belsejében lejátszódó fizikai folyamatokról alkotott elméleteink ellenőrzésére használhatjuk ezeket a csillagokat. Bonyolultabb turbulens konvektív leírások kifejlesztése és alkalmazása is szükségessé válhat, ha a mostanival – minden siker ellenére – sok kérdés megválaszolatlan marad. További szempont, hogy a kérdés elválaszthatatlan a mostanában igen divatos, sokat vizsgált, de máig sem teljesen értett asztrofizikai problémáktól (távolságskála, konvekció), és így feltétlenül tisztázni kell a fennálló ellentmondásokat. Végül rámutatunk, hogy az RR Lyrae vizsgálatok mára kiterjedtek Lokális galaxiscsoportunk távolabbi tagjaira (a teljesség igénye nélkül csak a legutóbbi eredmények közül válogatva: M31 [42] és gömbhalmazrendszere [31], And VI [88], Fornax [9] és gömbhalmazrendszere [80], Leo I [54], Leo II [94], stb.), földi és űrteleszkópok (HST) bevetésével. Ennél a populációnál azonban a távolság és így a rendkívüli halványság miatt sokszor nehéz eldönteni a fényességét változtató objektum mibenlétét, illetve a feltételezett RR Lyrae csillagok pulzációs módusát. Ehhez többek között a módusszelekció és az instabilitási sávok pontos megértése is támpontot adhat. Ez egyébként elengedhetetlen a nagyléptékű égboltfelmérő programok (SDSS [1], MACHO, stb.) melléktermékeként keletkezett vagy keletkező, korábban elképzelhetetlenül mennyiségű változócsillag és köztük az RR Lyrae csillagok adatainak és statisztikáinak megértéséhez is.

A kétmódusú csillagok vizsgálata képezi dolgozatom másik szerves egységét. E pulzátorok jelentőségét fokozza, hogy a (nagy pontossággal mérhető) második periódus további megszorítást jelent a csillag paramétereire nézve az egyetlen módusban rezgő társaikhoz képest [71]. Ennek ellenére kétmódusú modell RR Lyrae csillagok átfogó vizsgálata nem látott napvilágot az első modellek publikálása óta, ezért nagy jelentőséggel bír részletes modellsorozatom, mely alapján a módusszelekció, és a kétmódusú pulzáció tényleges létrejötte vizsgálható. Itt szintén fontos szerephez jut a fejlődés, hiszen ez magyarázatot adhat arra, hogy bár kétmódusú tartomány minden fémességés luminozitásértékre létezik, mégsem figyelünk meg minden gömbhalmazban kétmódusú csillagokat. Ez a paradoxon feloldható azon eredményeimmel, amelyek szerint az amúgy is keskeny hőmérséklet-tartománnyal jellemezhető kétmódusú régiót csak szűk tömegtartományba eső csillagok fejlődési görbéje metszi, nagy fémtartalom esetén pedig nem kapunk metszéspontot. Ezt a hipotézist alátámasztja a Petersen-diagram vizsgálata is: az RRd csillagok eloszlását a $P_0 - P_1/P_0$ síkon [4] elsőként sikerült nemlineáris kétmódusú modellek alapján reprodukálnom.

Itt szeretném megemlíteni az MTA Konkoly Thege Miklós Csillagászati Kutatóintézetének több évtizedes kimagasló szerepét az RR Lyrae csillagok kutatásának minden területén: megfigyelésükben csakúgy, mint elméleti vizsgálatukban. Ez a gazdag hagyomány és az itt felhalmozott tudás is közrejátszott kutatási területem megválasztásában.

[4] $P_0$ az alapmódushoz, $P_1$ a felhanghoz tartozó periódus

# 2. fejezet

# A radiális pulzáció modellezése

## 2.1. Hidrodinamika

Az instabilitási sáv modellezéséhez a módusszelekció nyomon követése szükséges. Ehhez sok nemlineáris modellt kell végigszámolni, s ez nem csak az alapmódusú kék szél meghatározásának az alapja, de a kétmódusú pulzáció lehetséges tartományait is szolgáltatni fogja. A számításokhoz az *ún.* Florida–Budapest kódot [68] használtuk, melynek alapjai megtalálhatók Gehmeyr és Winkler [52], [51] és Kuhfuss [76] munkáiban, és lényegét tekintve azonos a Wuchterl és Feuchtinger-féle [115] implementációval. A modellszámítás hidrodinamikai részét a következő egyenletek adják:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}\left(p + p_t + p_\nu\right) - \frac{GM_r}{r^2} \tag{2.1}$$

$$\frac{de}{dt} + p\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(F_r + F_c\right)\right] - \mathcal{C} \tag{2.2}$$

A gáz turbulens mozgása és a konvekció az $F_c$ konvektív fluxus, a $p_t$ turbulens nyomás, a $p_\nu$ turbulens (eddy) viszkozitás járuléka, valamint egy $\mathcal{C}$ energiacsatolási tag révén hat kölcsön a radiális hidrodinamikai mozgással. A turbulens energiát ($e_t$) a következő diffúziós egyenlet adja meg:

$$\frac{de_t}{dt} + \left(p_t + p_\nu\right)\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F_t\right) + \mathcal{C} \tag{2.3}$$

A gáz- és a turbulens energia közötti csatolási tagot a következő egyenlet szolgáltatja:

$$\mathcal{C} = \frac{e_t^{1/2}}{\Lambda}\alpha_d\left(S_t - e_t\right), \tag{2.4}$$

2.1. táblázat. Konvektív és turbulens paraméterek

| $\alpha_l$ | $\alpha_{cc}$ | $\alpha_\nu$ | $\alpha_s$ | $\alpha_p$ | $\alpha_t$ | $\alpha_d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,41 | 0,75 | 1,0 | 0,75 | 2/3 | 1,0 | 4,0 |

ahol $\Lambda = \alpha_\Lambda H_p$, $H_p = p\,r^2/(\rho GM)$ a nyomás skálamagassága, $\alpha_\Lambda$ a keveredési hossz paraméter, és $\alpha_d$ egy dimenziótlan paraméter.

Mind a konvektív fluxus, mind a turbulens energia forrástagja ($S_t$) függ az entrópiagradienstől: $Y = -H_p/c_p\,\partial s/\partial r$

$$S_t = (\alpha_s\,\alpha_\Lambda)^2 \frac{p}{\rho} \beta T\; Y\, f_{pec} \tag{2.5}$$

$$f_{pec} = \frac{1}{1 + \alpha_r Pe^{-1}} \quad , \qquad Pe = D_c/D_r \tag{2.6}$$

$$D_r = \frac{4}{3}\frac{acT^3}{\kappa\rho^2 c_p} \quad , \qquad D_c = \Lambda e_t^{1/2} \tag{2.7}$$

A többi mennyiséget a következőképpen definiáljuk:

$$p_t = \alpha_p\,\rho\,e_t \tag{2.8}$$

$$p_\nu = -\frac{4}{3}\alpha_\nu\,\rho\Lambda e_t^{1/2} r \frac{\partial}{\partial r}\frac{u}{r} \tag{2.9}$$

$$F_t = -\alpha_t\,\rho\Lambda e_t^{1/2}\frac{\partial\, e_t}{\partial r} \tag{2.10}$$

$$F_c = \alpha_c\alpha_\Lambda\,\rho e_t^{1/2}\, c_p T\, Y\, f_{pec}. \tag{2.11}$$

A számításoknál 120 zónát használtunk, a (dimenziótlan) turbulens konvekciós paramétereket a **2.1.** táblázat tartalmazza, ahol $\alpha_\nu$ jelenti a konstans eddy viszkozitást, $\alpha_l$ a keveredési hossz paramétert, $\alpha_c$, $\alpha_s$ és $\alpha_t$ a konvektív fluxuserősséggel, a turbulens forráserősséggel és a turbulens fluxus erősségével állnak kapcsolatban. $\alpha_p = (\gamma_p - 1)$ a turbulens eddy adiabatikus kompresszibilitási együtthatójával kapcsolatos, míg $\alpha_d$ – diffúzió hiányában – a turbulens energia növekedésének, illetve csökkenésének időskáláját szabályozza. A turbulens paramétereket úgy választottuk meg, hogy minél jobban visszakapjuk a megfigyelt amplitúdókat [68]. Azonban a paraméterek választása nem teljesen egyértelmű (lásd a **2.5.** fejezetet). A hidrogéntartalom egységesen $X = 0,75$ volt.

A megadott csillagparaméterekhez $(M, L, T_{\text{eff}}, Z)$ elsőként egy sztatikus csillagmodellt készítünk, vagyis meghatározzuk a nyomás, sűrűség, hőmérséklet stb. sugárfüggését. A pulzáció egy sajátérték-problémára vezethető vissza. A komplex sajátértékek képzetes része a periódusokat, a valós pedig a gerjesztés vagy csillapodás mértékét adja, míg a sajátfüggvények a sugárváltozás helyfüggését határozzák meg. Ezeket a sztatikus modell lineáris stabilitásvizsgálata szolgáltatja. Így kapjuk például a sebesség sajátfüggvényét is, amit a sztatikus modell kezdeti perturbációjához használunk a hidrodinamikai számításokban. Ezekkel a feltételekkel egy kezdeti érték feladathoz jutunk a nemlineáris feladat esetén. A periodikus megoldások keresésében nagy segítséget nyújt egy olyan iterációs algoritmus, mely a pulzációs ciklus elején megadott kezdeti feltételeket keresi a periódus idő elteltével, azzal a feltétellel, hogy a rendszer az eredeti állapotába tér vissza.

Egy modellcsillaghoz (rögzített $M, L, T_{\text{eff}}, Z$ esetén) több különböző pulzációs állapot tartozhat. Közismert az F és az O1 pulzációs állapotok szimultán létezése, de előfordulhat F és DM pulzáció egyidejű egzisztenciája is. Fontos tehát, hogy több különböző kezdeti feltétellel indítsuk a hidrodinamikai modellszámítást, így a tranziens fejlődési görbék elég sűrűn mintavételezik az amplitúdó-amplitúdó $(A_0, A_1)$ síkot. Ezért a következőképpen járunk el. A sztatikus modellt az alapmódushoz és az első felhanghoz tartozó sajátvektorok lineáris kombinációjával perturbálva, 750-1500 pulzációs perióduson keresztül követjük a hidrodinamikai viselkedést. Így biztosan megtaláljuk a fixpontokat viszonylag rövid számolás eredményeképpen, annak ellenére, hogy rendkívül hosszú tranziens jelenségek léphetnek fel, s csupán egy kezdeti feltétellel indítva a modellt lehetetlen lenne megállapítani annak végső dinamikai állapotát (**2.1**. ábra).

## 2.2. Az analitikus függvény módszere

A hidrodinamikai számítások eredményét, például a csillag sugarának $(R_*)$ változását analitikus függvény (idő-frekvencia) analízisnek vetjük alá [68], [107]. Ha a jelet $(s(t))$ egy feltételezett, komplex *analitikus* függvény $a(t)$ valós részének tekintjük, akkor $a(t)$ képzetes része $\tilde{s}(t)$ a Cauchy-formulán keresztül adódik, mely végül így írható:

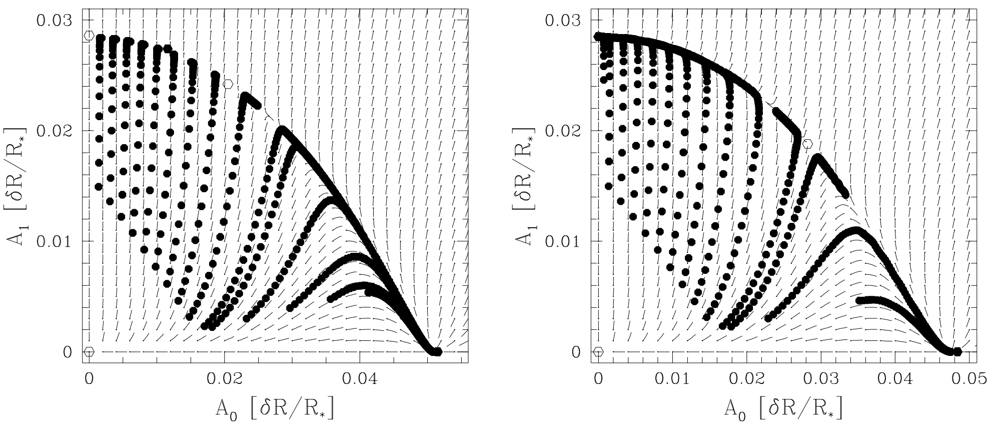
$$
\begin{aligned}
a(t) &= s(t) + i\tilde{s}(t) = s(t) + \frac{i}{\pi} PV \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{s(t')}{t-t'} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' s(t') e^{-i\omega t'}
\end{aligned}
$$

$$\equiv A(t)\ e^{i\varphi(t)} \tag{2.12}$$

Ez a módszer nagyon egyszerűen, hatékonyan és gyorsan szolgáltatja az időtől függő $A_j(t)$ amplitúdókat és a $\varphi_j(t)$ fázisokat. Ha többkomponensű jelünk van, akkor a Fourier-térben végzett szűréssel kivághatjuk az érdekes frekvencia körüli teljesítményt:

$$\begin{aligned} Z_k(t) &= A_k(t)e^{i\varphi_k(t)} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega H(\omega-\omega_k)e^{i\omega t}\int_{-\infty}^\infty dt' s(t')e^{-i\omega t'}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

ahol $H(\omega-\omega_k)$ a (Gauss) szűrőfüggvény, a kívánt $\omega_k$ értékre centrálva.




2.1. ábra. *Balra:* **F/DM**, azaz stabil alapmódusú (0,0515 ; 0,0000) és kétmódusú (0,0116 ; 0,0274) fixponttal rendelkező modell RR Lyrae ($M$ = 0,77 $M_\odot$, $L$ = 50 $L_\odot$, $T_{\rm eff}$ = 6510 K, $Z$ = 0,001) fejlődése az amplitúdó-amplitúdó $(A_0, A_1)$ fázistérben a különböző kezdeti feltételek függvényében. Az alapmódus és az első felhang amplitúdóját relatív sugárváltozásként fejeztük ki. A vektorteret normalizált vektorok mutatják, a pont a vektor kezdőpontját jelöli. A stabil fixpontokat kék tele hatszögek, az instabilakat üres idomok mutatják. *Jobbra:* **F/O1** , vagyis alapmódusú (0,0484 ; 0,0000) és első felhangbeli (0,0000 ; 0,0285) határciklussal rendelkező RR Lyrae modell ($M$ = 0,71 $M_\odot$, $L$ = 50 $L_\odot$, $T_{\rm eff}$ = 6700 K, $Z$ = 0,0001). Mindkét esetben megfigyelhetünk instabil kétmódusú fixpontot (0,0205 ; 0,0242), illetve (0,0282 ; 0,0188), valamint egy instabil O1 fixpontot az F/DM esetben (0,0000 ; 0,0286).

A **2.1.** ábrán két RR Lyrae modell amplitúdófejlődése látható. A bal oldalinak F és DM határciklusa, a jobb oldalinak F és O1 határciklusa létezik egyidejűleg. Az origó instabil egyensúlyi állapot, és a kezdeti feltételektől függően a modellek egyik vagy másik határciklusba fejlődnek. Ezeken kívül instabil O1, illetve instabil DM fixpont is megfigyelhető.

## 2.3. Időfüggetlen amplitúdóegyenletek

Amplitúdóegyenletek bármely dinamikai rendszer esetén alkalmazhatóak, ha az alábbi feltételek teljesülnek:

- a gerjesztett módusok relatív növekedési rátái kicsik,
- gyenge nemlinearitás jellemzi a rendszert.

Ezek a feltételek cefeidák és RR Lyrae csillagok esetén fennállnak.

A következőkben csak alapmódusú (F, $j = 0$) és első felhangban (O1, $j = 1$) történő pulzációra szorítkozunk.

Minthogy az RR Lyrae csillagok esetében a rezonanciák nem játszanak szerepet, az amplitúdóegyenleteket a nemrezonáns esetre írhatjuk fel [68]:

$$\dot{a}_0 = a_0(\sigma_0 + Q_{00}|a_0|^2 + Q_{01}|a_1|^2 + S_0|a_0|^2|a_1|^2 + R_{00}|a_0|^4 + R_{01}|a_1|^4) \quad (2.14)$$

$$\dot{a}_1 = a_1(\sigma_1 + Q_{10}|a_0|^2 + Q_{11}|a_1|^2 + S_1|a_0|^2|a_1|^2 + R_{10}|a_0|^4 + R_{11}|a_1|^4) \quad (2.15)$$

ahol $a_j$ a két módus komplex amplitúdója, $\sigma_j$ a lineáris sajátvektorokat jelöli $e^{\sigma t}$ időfüggést feltételezve, $\kappa$ a növekedési ráta, $\eta$ a relatív növekedési ráta, P a periódus, $Q_{jk}$, $S_j$ és $R_{jk}$ a komplex nemlineáris csatolási konstansok.

$$\sigma_j = \kappa_j + i\omega_j; \qquad P_j = \frac{2\pi}{\omega_j}; \qquad \eta_j = 2\kappa_j P_j \quad (2.16)$$

$$Q_{jk} = q_{jk} + i\hat{q}_{jk}; \qquad S_j = s_j + i\hat{s}_j; \qquad R_{jk} = r_{jk} + i\hat{r}_{jk} \quad (2.17)$$

A **2.17.** egyenletek jelöléseivel, valamint $a_j(t) = A_j(t)e^{i\phi_j(t)}$ függést feltételezve az egyenletek valós amplitúdókra ($A_j$) és fázisokra ($\phi_j$) vonatkozó egyenletekre szeparálhatók. Megjegyezzük, hogy ezek az egyenletek kifejezhetőek $A_0^2$ és $A_1^2$ segítségével. Végeredményben az **2.14.** egyenlet állandó amplitúdójú megoldásai, az *ún.* fixpontok, a **2.18-2.19**, valamint a **2.20-2.21.** egyenletek páronkénti megoldásaiból kaphatók:

$$\begin{aligned} \kappa_0 + q_{00}A_0^2 + q_{01}A_1^2 + s_0A_0^2A_1^2 + r_{00}A_0^4 + r_{01}A_1^4 &= 0 && (2.18)\\ A_1 &= 0 && (2.19)\\ \kappa_1 + q_{10}A_0^2 + q_{11}A_1^2 + s_1A_0^2A_1^2 + r_{10}A_0^4 + r_{11}A_1^4 &= 0 && (2.20)\\ A_0 &= 0 && (2.21) \end{aligned}$$

A bonyolult, nemlineáris *parciális* differenciálegyenlet-rendszer helyett egy sokkal egyszerűbb, *közönséges*, másodrendű, nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldása szolgáltatja a minket érdeklő fixpontokat, vagyis a pulzációs állapotokat. Ha jól megválasztott modellekhez sikerül ezeket az amplitúdóegyenleteket illesztenünk, akkor a idő- és számításigényes hidrodinamikai futtatások nagy része feleslegessé válik.

A különböző kezdeti feltételekkel indított modellszámítások (tranziens) amplitúdógörbéihez (**2.1.** ábra) illeszthetők az amplitúdóegyenletekben szereplő paraméterek (növekedési ráták és csatolási együtthatók). Az illesztés lineáris, mert az analitikus függvény módszerének alkalmazása elég sima amplitúdófüggvényeket ad ahhoz, hogy az időderiváltakat kiszámíthassuk.

Az eddig tárgyalt közelítés, mely rögzített $M, L, T_{\rm eff}, Z$ értékeket tételezett fel a csillag esetében, a módusváltásoktól távol alkalmazható. Lényegében "befagyasztjuk" a modellt a fejlődési görbe egy pontjában, és ekkor meghatározhatjuk az amplitúdókat. Ezt kvázi-sztatikus közelítésnek nevezzük (QSA).

## 2.4. Időfüggő amplitúdóegyenletek

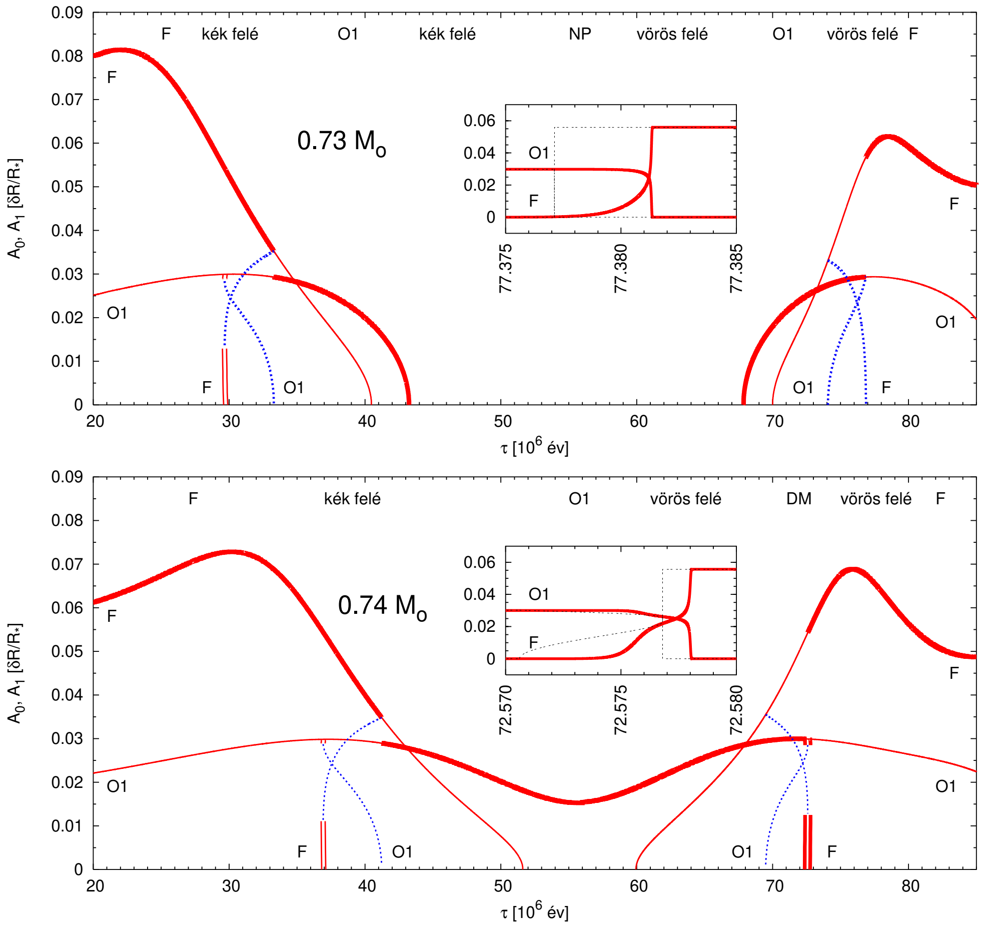
A fenti eljárást elég sok modellre elvégezve végigkövethetjük a csillag fejlődését az instabilitási sávon, mert a paraméterek könnyen interpolálhatóak a diszkrét rácson számolt modellek között. Érdemes megjegyezni, hogy a növekedési ráták és csatolási együtthatók lassan változnak egy fejlődési görbe mentén, azonban a hozzájuk tartozó amplitúdók (az AE-k megoldásai) és a pulzációs állapotok gyorsan változhatnak. Írjuk az amplitúdóegyenleteket

$$\dot{A}_0 = \left(\kappa_0(\xi) + q_{00}(\xi)A_0^2 + q_{01}(\xi)A_1^2 + s_0(\xi)A_0^2A_1^2 + r_0(\xi)A_0^4\right)A_0 \qquad (2.22)$$

$$\dot{A}_1 = \left(\kappa_1(\xi) + q_{10}(\xi)A_0^2 + q_{11}(\xi)A_1^2 + s_1(\xi)A_0^2A_1^2 + r_1(\xi)A_1^4\right)A_1 \qquad (2.23)$$

alakba, ahol $\xi = \xi(L, T_{\rm eff}, M)$. Ily módon az egyenletek időfüggővé tehetők a luminozitás és az effektív hőmérséklet változásán keresztül reális fejlődési modellek felhasználásával. A tömeg változását (pl. tömegvesztés) elhanyagoljuk, csak a luminozitás és az effektív hőmérséklet változik egy RR Lyrae fejlődési görbéje mentén.

A **2.2.** ábrán (lásd még az **5.1.** ábrát) két különböző tömegű modellcsillag fejlődése során bekövetkező (komponens-) amplitúdóváltozását mutatom be, melyet a **2.22.-2.23.** egyenletek integrálásával kaptam. Demarque-féle csillagfejlődési eredményeket [41] interpoláltam és alkalmaztam a modelljeimhez. A kisebb tömegű modell ($M = 0{,}73\,\mathrm{M}_\odot$) elhagyja az instabilitási sávot miután alapmódusból felhangbeli pulzációra váltott, majd visszatérve fordított




2.2. ábra. Amplitúdók és komponens amplitúdók két, az instabilitási sávon keresztül fejlődő $Z = 0{,}0001$ RR Lyrae modellsorozatra. *Felül:* $M = 0{,}73\,\mathrm{M}_\odot$, *alul:* $M = 0{,}74\,\mathrm{M}_\odot$. Az eltelt időt ($\tau$) a ZAHB-tól számítjuk. A vastag vonalak a tényleges pulzációs amplitúdót mutatják, a pontozott görbék instabil kétmódusú fixponthoz tartozó amplitúdókat jelölnek. A megvalósuló kétmódusú pulzáció amplitúdókomponenseit dupla vonallal jelzem. Kétmódusú pulzáció csak a nagyobb tömeg esetén, kisebb hőmérséklet felé történő fejlődéskor lép fel. Kinagyítva láthatók a két esetben eltérő jellegű módusváltásokhoz (O1-F; O1-DM-F) tartozó amplitúdók és időskálák. Itt a QSA-amplitúdókat szaggatott vonal jelöli. Legfelül az észlelhető pulzációs mód és a fejlődés iránya látható, NP az instabilitási sáv időleges elhagyását jelzi. Hasonlítsuk össze az **5.1.** ábrával!

sorrendben ugyanez játszódik le. A nagyobb tömegű modell ($M = 0{,}74\,\mathrm{M}_\odot$) nem hagyja el az instabilitási sávot, hanem a felhang-tartományban fordul vissza, és a vörös felé történő fejlődés során kétmódusú állapotba is jut, viszonylag rövid ideig. A számítások során a módusváltásban jelentkező késleltetést is figyelembe vettem [16]; az eltérő módusváltást mutató részt kinagyítottam. Itt feltüntettem a QSA-amplitúdókat is. A vörös felé történő fejlődés közben a kisebb tömegű modell felhangból alapmódusba vált, míg a nagyobb tömegű felhangból először kétmódusú állapotba, majd szintén alapmódusba. Feltűnő, hogy a módusváltás nem hirtelen történik, hanem késleltetve; az átmenet időskálája néhány ezer év.

A vázolt módszer alkalmazásával lehetőség nyílik a klasszikus változócsillagok radiális pulzációjának konzisztens végigkövetésére az instabilitási régión keresztül.

## 2.5. RR Lyrae modellsorozatok

Rögzített $M, L$ értékekkel, három különböző fémesség esetére ($Z = 10^{-4}$, $10^{-3}, 4 \cdot 10^{-3}$) számoltam modellsorozatokat, és ezek alapján interpoláltam a pulzációs szempontból különböző tartományok hőmérsékleti határait. A modellsorozatok paramétereit és a tartományok széleire vonatkozó adatokat a függelék tartalmazza. A cél az volt, hogy a tartományok szélességét elegendő pontossággal számolhassam ($2-3$ K) egy sorozat esetén, az effektív hőmérsékletet mint kontrollparamétert változtatva. Ehhez minden sorozatban 8-10 modellt kellett számolni, különböző hőmérséklettel. A modellek által alkotott ráccsal az RR Lyrae csillagok teljes paramétertartományát igyekeztem optimálisan lefedni.

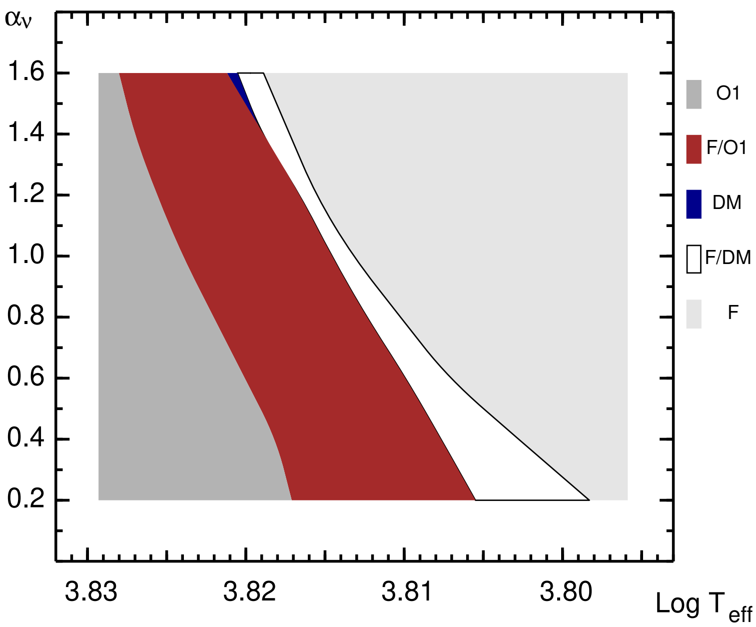
A pillanatnyi amplitúdók és frekvenciák meghatározásához nélkülözhetetlen segítség volt az amplitúdóegyenletek illesztése és az analitikus függvény módszerének alkalmazása (Kolláth és Buchler [66]). Végül időfüggetlen amplitúdóegyenleteket illesztettem a nemlineáris határok (szélek) meghatározásához, az előző szakaszokban leírtak alapján.

A következő fixpont-kombinációk fordultak elő modelljeimben:

– alapmódus (F)
– első felhang (O1)
– alapmódus és első felhang (F/O1) (**2.1.** ábra)
– kétmódusú (DM)
– alapmódus és kétmódusú (F/DM) (**2.1.** ábra)

Mivel a DM és az F/DM régiók viszonylag keskenyek, ezeket nehéz közvetlenül megtalálni, viszont az előzőekben ismertetett módszerrel, azaz az illesztett amplitúdóegyenlet-paraméterek interpolációjával ezek léte felfedhető, és további modellek futtatásával minden esetben sikerült bizonyítani a kétmódusú pulzáció jelenlétét. Ilyen értelemben az amplitúdóegyenlet formalizmus analitikusfüggvény-módszerrel kiegészítve robusztus eljárásnak bizonyult.

Néhány szót ejtenünk kell módszerünk alkalmazhatóságainak határairól. Említettük, hogy a turbulens konvektív paraméterek kalibrációja nem végle-




2.3. ábra. Modell RR Lyrae csillag módusszelekciójának változása az $\alpha_\nu$ paraméter függvényében ($M = 0{,}77\,\mathrm{M}_\odot$, $Z = 0{,}0001$, $L = 50\,\mathrm{L}_\odot$). Az alapmódus vörös és a felhang kék szélét nem tüntettük fel.

ges. Ezért többféle paramétersorozat alkalmazása is elképzelhető. Vizsgálataim során korábbi munkánk alapján [68], az amplitúdó-kritériumot teljesítő kombinációt alkalmaztam. A megfigyelt amplitúdókra és az instabilitási sáv szélességére vonatkozó kritériumok azonban nem elégíthetők ki ugyanazzal a paraméterérték-halmazzal. Ezért az alapmódus (lineáris és nemlineáris) széle irreálisan alacsony hőmérsékletnél adódott. Ez kisebb problémát okoz csak, tekintve, hogy a többi határt nem befolyásolja, és dolgozatomban főképp a magasabb hőmérsékletnél lévő kétmódusú tartománnyal és az alapmódus kék szélével foglalkoztam.

Felmerülhet a kérdés, hogy ha fizikai meggondolások alapján nem tudjuk meghatározni az $\alpha$-paramétereket, és a modellek megfigyelésekkel való összehasonlítása sem hozott végleges eredményt, akkor mennyiben lehet helyes a módusszelekció-vizsgálat. A kérdés eldöntéséhez az $\alpha$-kat külön-külön változtatva meghatároztam hatásukat a módusszelekcióra (példaként lásd az $\alpha_\nu$-re vonatkozó, **2.3.** ábrát). Azt találtam, hogy drasztikus ($\pm 50\%$) változtatás esetén is legfeljebb $10 - 50\,\mathrm{K}$ közötti eltérés lép fel az egyes szélek hőmérsékletében. Ráadásul minden szél együttesen mozdul el, ami azt jelenti, hogy az alapmódus kék szélének meghatározását nem befolyásolja az, ha más TC paramétereket alkalmaznánk. A fentiek tükrében azt mondhatjuk, hogy a módusszelekciós kép (az alapmódus alacsony hőmérsékletű szélét kivéve) alapvetően helyes.

# 3. fejezet

# Az RR Lyrae csillagok módusszelekciója

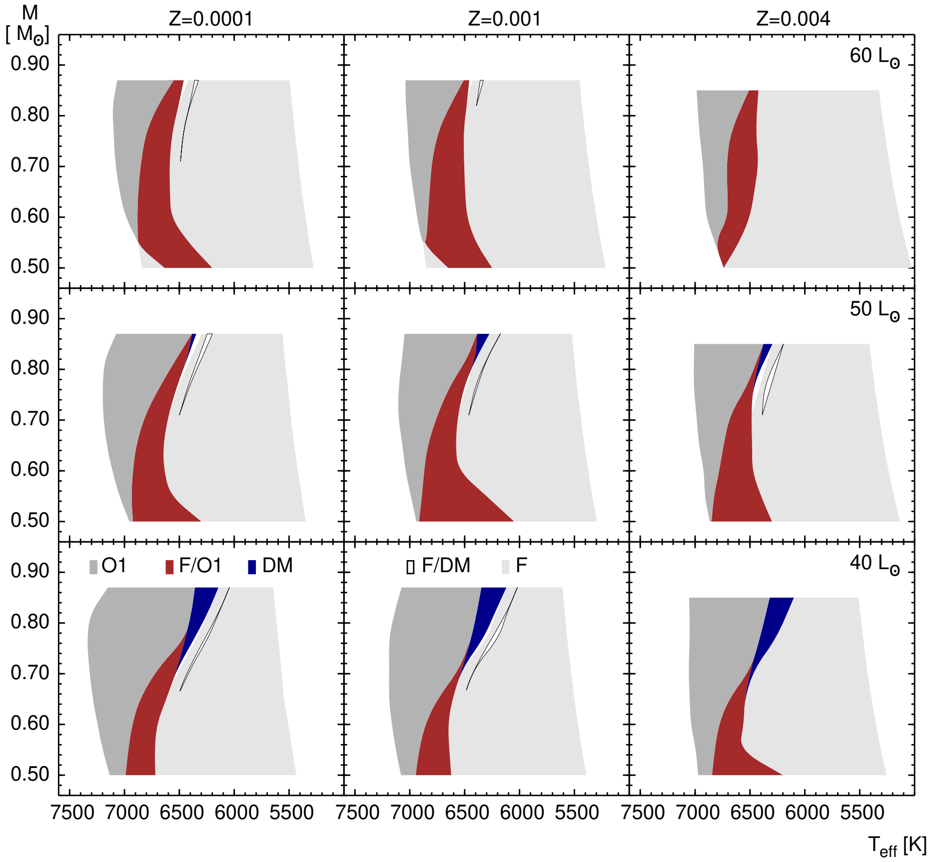
## 3.1. Eredmények

A modellszámítások eredményét a **3.1.** ábrán, módusszelekciós térképek formájában, tömeg – effektív hőmérséklet diagramon mutatom be. A diagramok alapjául szolgáló adatokat a függelék tartalmazza. Az RR Lyrae instabilitási sáv első nemlineáris, turbulens konvekciót is tartalmazó számításokon alapuló részletes feltérképezéséről van szó. A korábbi munkák valamely paramétert (vagy többet) rögzítettek, illetve nem adtak számot a kétmódusú tartományokról. A legfontosabb tulajdonságokat a következőkben foglalhatjuk össze:

- Az instabilitási sáv topológiája hasonló, de nem teljesen egyező a különböző luminozitású és fémtartalmú esetekben. A tömeget változtatva is módosul az instabilitási sáv szerkezete. Eredményünk jó egyezésben van Bono és Stellingwerf [14] eredményével, miszerint az alapmódus kék széle vörösebb alacsonyabb luminozitásnál. A fémesség változtatása a megfigyelhető szerkezetek eltolódásában jelentkezik hőmérsékletben, ennek mértéke tipikusan kisebb 100 K-nél. Azonban a kis változások nem hagyhatók figyelmen kívül az alapmódus kék szélének elméleti meghatározásakor. Ennek jelentőségét a **4**. fejezetben fejtem ki részletesen.

- A felhang kék széle konzisztens Catelan [22] eredményeivel és a cikkében megjelölt irodalomban fellelhető számításokkal, de modelljeimben függ a tömegtől, a fémtartalomtól, és kisebb mértékben a luminozitástól is.

- Egyidejűleg létező alapmódusú és első felhangbeli fixpontokkal jellemezhető tartományt (F/O1) a vizsgált $Z$ és $L$ intervallumban minden-




3.1. ábra. Modell RR Lyrae sorozatok módusszelekciója az effektív hőmérséklet-tömeg síkon. A luminozitás alulról felfelé $L = 40, 50, 60\,\mathrm{L}_\odot$, a fémtartalom balról jobbra $Z = 10^{-4}$, $Z = 10^{-3}$, $4 \cdot 10^{-3}$. A jobb láthatóság kedvéért az F/DM tartományokat kétszer tüntettük fel, egyszer az eredeti helyen, másodszor 100 K-nel jobbra eltolva.

hol találtunk. Ez alapvető fontosságú az alapmódus kék szélének meghatározásánál. Nagyobb luminozitásnál (és különösen nagyobb fémtartalomnál) ennek a zónának a szélessége növekszik adott tömegértékre. Megjegyezzük, hogy a kisebb tömegek irányában nő a módusszelekció bizonytalansága (a modellek lassabban konvergálnak, kevésbé jól interpolálhatóak az AE-ek együtthatói stb.), s ezért például a kis tömegeknél jelentkező F/O1 régió kiszélesedését óvatosan kell kezelnünk. Mivel ezeket a tartományokat a fejlődési görbék jórészt elkerülik, a probléma az alapmódus kék szélét nem érinti.

- Kétmódusú régiót (DM vagy F/DM) szintén minden $Z$ és $L$ értéknél találunk. Ezeket általában keskeny hőmérsékleti tartomány jellemzi: maximum $10 - 60\,\mathrm{K}$). Bár a jobb felső panelen ($Z = 0{,}004$, $L = 60\,\mathrm{L}_\odot$)

a kétmódusú zóna hiányzik, de magasabb tömegértéknél – a leolvasható általános módusszelekciós törvényszerűségek alapján – minden bizonnyal megtalálható. $L = 40\,\mathrm{L}_{\odot}$ luminozitás értéknél főként tiszta DM fixpont található, míg magasabb luminozitásnál mindenhol találunk F/DM tartományt is, közvetlenül a DM régió alacsonyabb hőmérsékletű szélénél. Itt jegyezzük meg, hogy a **3.1.** ábrán az F/DM tartományokat kétszer rajzoltuk fel a jobb láthatóság kedvéért, egyszer az eredeti helyen, másszor pedig 100 K-nel jobbra eltolva.

- Az általam kapott kétmódusú sáv helye jó egyezésben van az RRd csillagok HRD-n elfoglalt helyével – melyet megfigyelések szolgáltatnak (pl. [7]).

- Szoros kapcsolatot tártunk fel a kétmódusú tartományok és az F/O1 régiók között. Először is mindkettő a tiszta F és O1 zónák között helyezkedik el. Általános szabályként megállapíthatjuk, hogy rögzített $Z$ és $L$ esetén kis tömegnél F/O1, magasabb tömegnél kétmódusú tartomány létezik. Érdekes megfigyelni, hogy hogyan veszi át a tömeg növelésével az F/O1 régió helyét a kétmódusú tartomány. A kettőt elválasztó tömegérték, vagyis a *minimális kétmódusú tömeg* a nagyobb luminozitások felé növekszik.

- A tiszta felhang tartománya keskenyedik kis tömegek felé. Ellenben a felhangbeli pulzáció teljes lehetséges tartománya (O1 + F/O1 ) többé-kevésbé állandó marad. Ez teljes összhangban van Bono és társai [12] eredményeivel.

- Nagy luminozitásnál és kis tömegnél egy további F tartomány jelentkezik. Ez minden $L = 60\,\mathrm{L}_{\odot}$ luminozitással számolt panelen jelen van. A nagy hőmérsékletnél jelentkező F pulzációt az O1 zónától az F/O1 zóna elválasztja egymástól, más szóval létezik egy hármaspont a tömeg–hőmérséklet diagramon. Bár az amplitúdóegyenletek megengedik ezt a viselkedést, a gyakorlatban nem figyelhető meg a magas hőmérsékleteken az alaphang visszatérése, s így az instabilitási sáv szerkezetét sem befolyásolja, mivel a fejlődési görbék nem érik el ezt a tartományt.

- O2 pulzációt (RRe csillagok) nem találtam. Ez valószínűleg annak tudható be, hogy főként az F, az O1 és a DM pulzációra koncentrálva végeztem a modellek futtatását. Az O2 fixpontok feltárása (főként, ha létezik stabil fixpont is) további munkát igényel, és folyamatban van.

## 3.2. Következtetések

Az RR Lyrae csillagok instabilitási sávjával foglalkozó eddigi vizsgálatok szinte kivétel nélkül az alábbi két feltevéssel éltek:
– az F/O1 zóna a tiszta alapmódusú és tiszta első felhang zóna között helyezkedik el,
– a kétmódusú tartomány az F és az O1 zóna között van.

Az előző részben láttuk, hogy ez nem minden esetben van így, mert kis tömegeknél csak F/O1, a tömeget növelve pedig csak kétmódusú részt adnak a nemlineáris modellek. Ez rendkívül fontos az instabilitási sáv és a kétmódusú csillagok megértése szempontjából is. Ahhoz a mindmáig megmagyarázatlan jelenséghez is közelebb juthatunk, hogy bizonyos gömbhalmazokban nincsenek RRd csillagok, másokban pedig viszonylag nagy számban fordulnak elő (**5.** fejezet), [28].

Korábbi vizsgálatainkkal [68] egybehangzó módon azt kaptuk, hogy maga a kétmódusú tartomány a hőmérsékletet tekintve viszonylag keskeny sávot foglal el a HRD-n. Ezzel szemben meglepő és új eredmény, hogy minden luminozitás- és fémességértéknél létezik kétmódusú tartomány. Azt, hogy a fejlődési görbéket is figyelembe véve milyen kétmódusú tartomány adódik, az **5.2.** fejezetben tárgyaljuk részletesen.

Érdemes megjegyezni, hogy az észlelők oldaláról szokásos az RRe csillagokat megkülönböztetni az RRc-ktől, főként a perióduseloszlásban tapasztalható különálló rövidebb periódusú csúcs [4] miatt. Hallgatólagosan második felhangbeli pulzációt tulajdonítanak ezeknek az objektumoknak. Elméleti oldalról Stellingwerf, Gautschy és Dickens [102] és Stothers [103], valamint Kovács [70], [69] foglalkozott a kérdéssel. Az előállított második felhangban pulzáló modellek furcsa fénygörbe-tulajdonságokat mutattak, és nem biztos, hogy a paramétertér megfelelő tartományában voltak (radiatív kód, egyzóna-modell). Kovács szerint rövid periódusú első felhangbeli pulzátorokról van szó. Úgy tűnik, hogy léteznek O2/O1 kétmódusú RR Lyrae csillagok is [2] (LMC), [11] (Draco) melyek létére a $0{,}745\pm0{,}010$-től (lásd **5.2.** fejezet) eltérő, nem-kanonikus periódusarány utalhat. A kérdés azért is rendkívül érdekes, mert a cefeidák esetében egymódusú O2 és kétmódusú O2/O1 pulzáció is bizonyítottan előfordul.

# 4. fejezet

# Az alapmódus kék széle

## 4.1. Megfigyelések, empirikus relációk

Kovács és Jurcsik egy sor munkájára alapozva (Kovács és Jurcsik [73], [74]; Jurcsik [59]) mezőbeli, halmazbeli és a Lokális csoporthoz tartozó RRab csillagok fizikai paramétereinek homogén adatbázisa áll rendelkezésünkre. Az általuk kifejlesztett módszer abban áll, hogy a csillag fizikai paraméterei – úgy mint az abszolút magnitúdó, a színindexek, az effektív hőmérséklet és a fémtartalom – közvetlenül nyerhetők a megfigyelt fénygörbéből és periódusból. A vizsgálatok empirikus relációkat tártak fel a luminozitás ($L$), a csillag tömege ($M$) és a fémtartalma ($Z$) között. A gondolatmenet csak az $M - V$ és $B - V$ értékek $L - T_{\mathrm{eff}}$ síkra transzformálásához használ elméleti megfontolásokat (Kurucz sztatikus atmoszféramodelljeit [77]), egyébként teljesen empirikus.

A formulákban szereplő periódus és a fényváltozás alakját leíró paraméterek ($P = 1/f, A_1, \phi_{31}, \phi_{21}$) a fénygörbe szokásos Fourier-felbontásából adódnak:

$$m(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k cos(2\pi k f t + \phi_k). \tag{4.1}$$

Az amplitúdóarányok és a fáziskülönbségek szokásos definíciója a következő:

$$R_{n1} = A_n/A_1; \qquad \phi_{n1} = \phi_n - n\phi_1. \tag{4.2}$$

Az empirikus relációk a következőképpen foglalhatók össze röviden:

$$\begin{pmatrix} M_V \\ V-K \\ [Fe/H] \end{pmatrix} \equiv \underline{C}_0 + \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} P \\ A_1 \\ \phi_{31} \\ \phi_{41} \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Sztatikus légkörre az elméleti síkra történő transzformáció (Kurucz-modellekből) az alábbi alakban írható:

$$\begin{pmatrix} L \\ T_{\mathrm{eff}} \end{pmatrix} = \underline{C}_1 + \underline{\underline{C}} \begin{pmatrix} M_V \\ V-K \\ [Fe/H] \end{pmatrix} = \underline{C}_2 + \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} P \\ A_1 \\ \phi_{31} \\ \phi_{41} \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

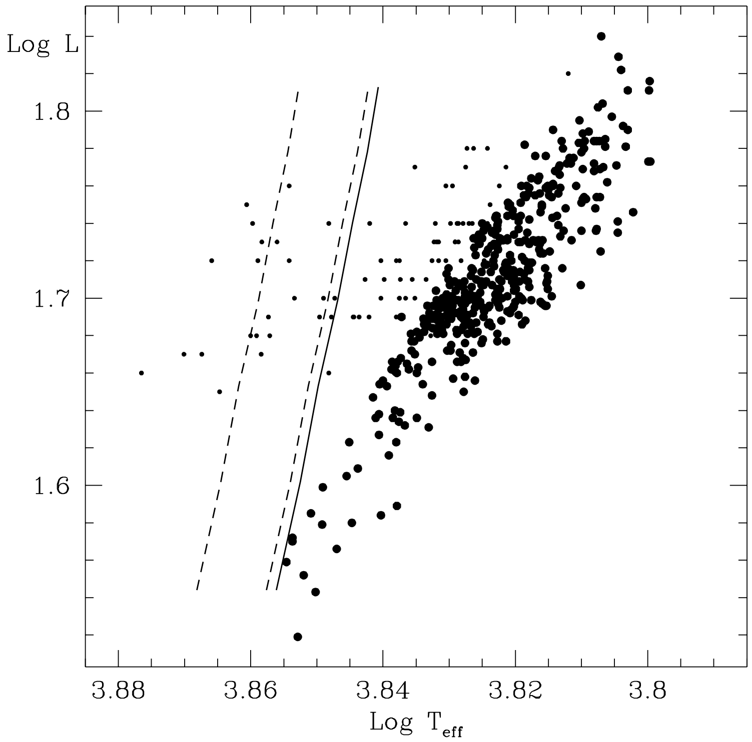
A **4.4.** összefüggésekkel tehát kapcsolat teremthető a legegyszerűbb megfigyelhető fénygörbe-paraméterek és a luminozitás, valamint az effektív hőmérséklet között. Fontosságuk abban áll, hogy a továbbiakban az ezekkel transzformált, megfigyelt RR Lyrae eloszlást hasonlítjuk össze a HRD-n az általunk számolt elméleti instabilitási sáv jellemzőivel.

Érdemes megjegyezni, hogy homogén RRc mintára nem létezik hasonlóan jól használható, az RRab csillagokéhoz hasonló empirikus reláció-család [85]. Ezért a felhang instabilitási sávját és ennek széleit nem tárgyalom az F kék széléhez hasonló részletességgel. Megfigyelési oldalról nehezíti még az elméleti és megfigyelt IS szerkezetek összehasonlítását a kisebb amplitúdó okozta csökkent detektálási hatékonyság, ami torzítja vagy torzíthatja az első felhangban pulzáló RR Lyrae változók mintáját.

## 4.2. Az alapmódus kék szélének problémája

A **4.4. relációk** alapján előállítható, mező, (galaktikus) gömbhalmazbeli[1], LMC[2] és Sculptor RRab és RRc csillagokat tartalmazó, empirikus $\log T_{\mathrm{eff}} - \log L$ diagram képezi Kolláth és társai [67] munkájának alapját. Korábbi munkák ([66], [15], [68], [46]) igazolták, hogy a pulzációs számításokban a turbulens konvekció figyelembevétele elengedhetetlen, főként, ha stabil kétmódusú pulzációt szeretnénk modellezni (RR Lyr: Feuchtinger [45]; cefeidákra: Kolláth és társai [65]). Azonban azok a vizsgálatok, melyek a megfigyelt alapmódusú (F) és első felhangbeli (O1) RR Lyrae csillagok instabilitási sávjának magas hőmérsékletű (azaz kék) szélének modellezését kísérelték meg,

[1] M3, M4, M5, M68, M92, M107, NGC 3201, $\omega$ Centauri, Rup. 106
[2] NGC 1466, NGC 1841, Reticulum




4.1. ábra. Megfigyelt RRab-RRc eloszlás. A fekete körök alapmódusú (RRab), a piros pontok első felhangban pulzáló csillagokat (RRc) jelölnek. A folytonos vonalak a radiatív, a szaggatottak a konvektív kék széleket jelölik (a turbulens konvekció különböző paraméter-kombinációival), a csillagfejlődés figyelembe vétele nélkül. Kolláth és társai [67] 1. és 3. ábrái alapján.

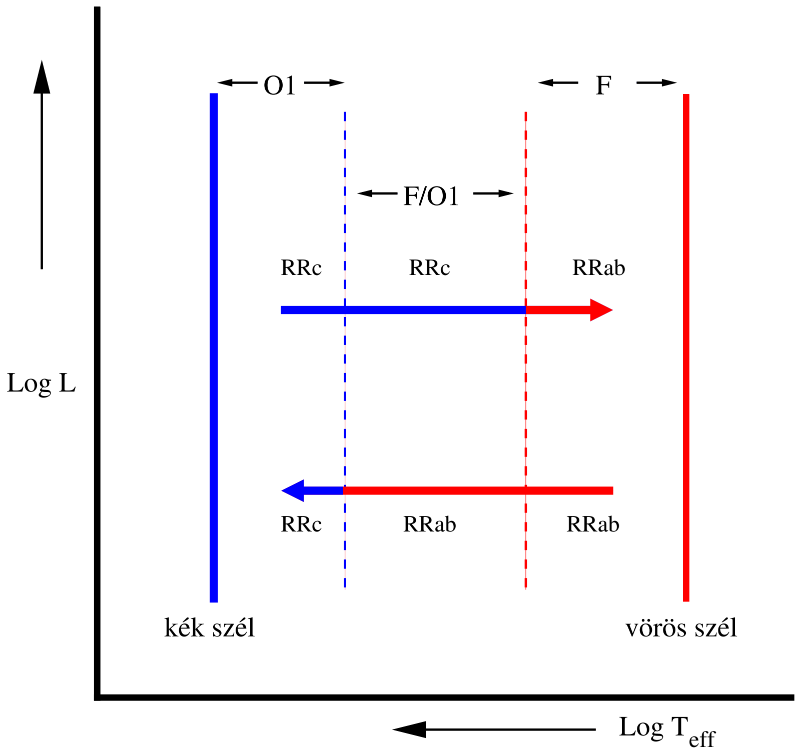
nem hoztak sikert: sem radiatív, sem konvektív modellek nem tudták megmagyarázni az empirikus relációkra alapozott F és O1 instabilitási sávok kék széleinek enyhe meredekségét. A turbulens konvekció hozzáadása a modellekhez csak vízszintes eltolódást eredményezett a kék szélekben (**4.1.** ábra).

Az említett munkában a szerzők ([67]) egy sor fizikai hatást vettek górcső alá (rotáció, különleges kémiai összetétel, sugárzási transzfer, állapotegyenlet, szín–hőmérséklet transzformáció stb.), de ezek egyike sem adott magyarázatot a meredekség *differenciális* (vagyis luminozitástól függő) változására. Szintén megkérdőjelezhető a turbulens paraméterek luminozitástól (vagy fémtartalomtól) függő esetleges változtatása, mert semmilyen kézzelfogható magyarázat nincs arra, hogy ezeknek miért kellene az előírt, vagy bármely más módon változniuk.

Megemlítjük, hogy az ellentmondást implicit módon már korábbi modellszámítások is tartalmazzák [108], [12].

A [67] cikket követve világos, hogy valami hiányzik az instabilitási sávok leírásából. Miután minden más lehetséges fizikai hatást kizártunk, két további effektus hatását vizsgáltam az RR Lyrae instabilitási sávra, nevezetesen: (1) a turbulens konvekciót is tartalmazó numerikus hidrodinamikai pulzációs kóddal követhető *módusszelekcióét* és a (2) horizontális ági (HB) *csillagfejlődését*. A továbbiakban elméletben demonstrálom, hogy ezek együttesen hogyan segíthetnek az ellentmondás feloldásában (**4.3.** fejezet), majd részletesen bemutatom a módszert, amivel ezt a kérdést vizsgáltam (**4.4.-4.6.** fejezet), és végül rátérek az eredményekre (**4.7.** fejezet).

## 4.3. Módusszelekció és csillagfejlődés




4.2. ábra. A módusszelekciós hiszterézis sematikus szemléltetése. Az F/O1 tartományban F és O1 pulzáció is előfordulhat ugyanolyan $M, Z$ esetén, a fejlődés irányától függően ([97] 3.11. ábrája alapján).

Már 1973-ban van Albada és Baker [110] felvetette, hogy a galaktikus gömbhalmazok megfigyelt kettőssége – ami az RRab, illetve RRc változók átlagperiódusának, valamint számarányának markáns különbségében mutatkozott meg (Oosterhoff-dichotómia) – egyfajta hiszterézis-jelenség következménye (is) lehet. Vagyis létezik a HRD-n egy olyan tartomány, ahol a fejlődés irányától függ a pulzációs módus. Így a megfigyelt különbségeket az eltérő fejlődési állapot okozhatja. Ezen tartomány létét alátámasztják bizonyos megfigyelési adatok értelmezését célzó vizsgálatok [20], az amplitúdóegyenlet formalizmus [17], és a legmodernebb numerikus hidrodinamikai számítások is ([66], [68], valamint lásd a **3.1.** fejezetet).

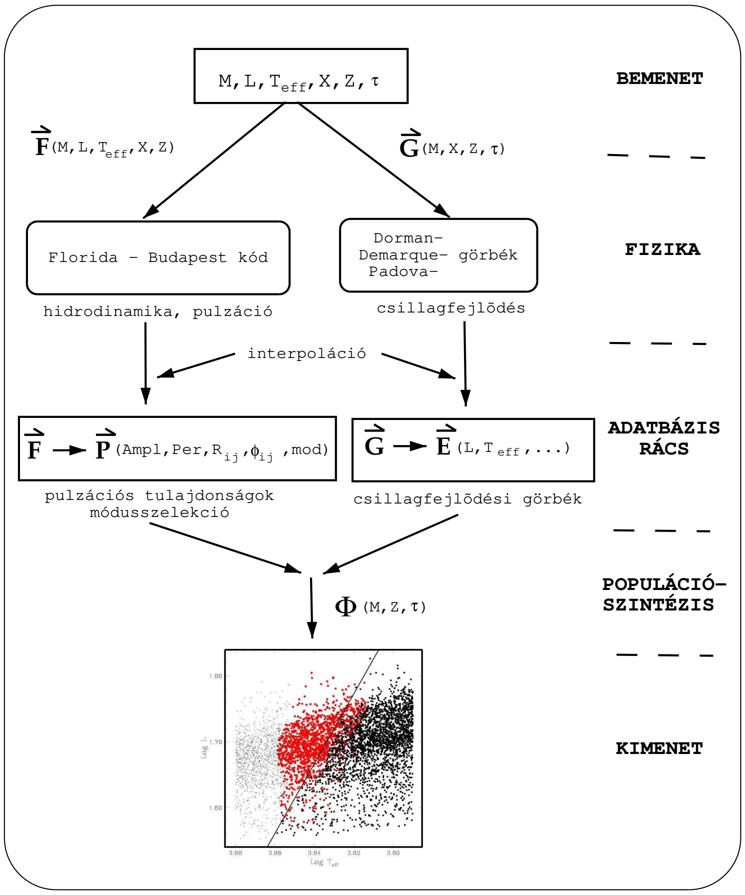
A hiszterézis esetünkben azt jelenti, hogy ha egy csillag magasabb hőmérsékletek felé fejlődik (kék irányba), akkor alapmódusú pulzációt mutat ebben a régióban (RRab), míg ha ellenkező irányba fejlődik (vörös felé), akkor azonos fizikai paraméterek $(L, M, Z)$ mellett itt felhangban fog pulzálni (RRc), amint azt a **4.2.** ábra mutatja. Az átmeneti zóna szélessége több száz Kelvin lehet, a tömegtől és a luminozitástól függően. Ezért a különböző fémtartalmú csillagok különböző luminozitásoknál keresztezik ezt az átmeneti zónát, és így a módusszelekció jelentősen befolyásolhatja a kék szél meredekségét. Ennek vizsgálatához természetesen realisztikus HB-populáció, ezen csillagminta egyedeinek fejlődése és a megfelelő pulzációs jellemzők együttes nyomon követése szükséges.

Megemlítem, hogy a "klasszikus" F/O1 zóna mellett F/DM hiszterézist is találtam, vagyis itt egyszerre létezik alapmódusú és kétmódusú fixpont. Ennek a tartománynak az **5.** fejezetben lesz további jelentősége.

## 4.4. Új módszer a kék szél meghatározására

Az eddig elmondottak alapján a módusszelekció (főként az F/O1 tartomány) és a csillagfejlődés együttes figyelembevétele szükséges. Hogyan oldható meg ez a feladat, ha az F/O1 zóna különböző paraméterektől való függését is szem előtt akarjuk tartani, tekintve, hogy ez mind befolyásolja a végső meredekséget?

A módszert szemléletes formában foglalja össze a **4.3.** folyamatábra. Az alapötlet az, hogy számítsunk ki egy elég sűrű rácsot RR Lyrae modellekből (különböző tömeg, luminozitás és fémtartalom mellett – az ábrán $\vec{\mathbf{F}}$), azért, hogy a módusszelekciót feltérképezhessük a HRD-n. Ezáltal bármely horizontális ági szintetikus csillagpopuláció egyedeinek pulzációs viselkedését meg tudjuk határozni. A **4.3.** ábrán a $\vec{\mathbf{P}}$ vektor tartalmazza a pulzációra jellemző mennyiségeket, így a periódust, az amplitúdót, a fénygörbe-paramétereket és a pulzációs módust is. Ez utóbbi nem független az előzőektől, de a mi esetünkben csak erre van szükség, ezért külön feltüntettük. A mintának a teljes paraméter-tartományt le kell fednie ($M, Z$ és a ZAHB-tól eltelt fejlődési idő $(\tau)$). Ezt a **2.** fejezetben bemutatott szofisztikált módszerek felhasználásával elvégeztem, és az eredményeket részletesen bemutattam a **3.1.** fejezetben.




4.3. ábra. Az alapmódus kék szélének a módusszelekció és a csillagfejlődés figyelembevételével történő meghatározására alkalmazott módszerem sematikus folyamatábrája. Egy szintetikus populáció minden tagja a bemenő fizikai mennyiségekkel van meghatározva, amihez az interpolált pulzációs modellek és csillagfejlődési görbék alapján határozható meg a pulzációs módus. Ezek eloszlása a HRD-n adja az alapmódus kék szélét.

Minthogy a pulzációs módus bizonyos tartományokban – az említettek szerint – függ a csillagfejlődés irányától, szükségünk van erre az információra is. A csillagfejlődés leírásához horizontális ági fejlődési görbéket, numerikus számítások eredményeit vettem alapul. Csillagfejlődési görbén olyan függvényt értünk, ami egy modellcsillag életkorához és egyéb fizikai jellemzőihez (tömeg, kémiai összetétel, kor, az ábrán $\vec{\mathbf{G}}$) egyértelműen megadja a luminozitását és effektív hőmérsékletét (és egy sor egyéb mennyiséget ($\vec{\mathbf{E}}$): magtömeg, magluminozitás, bolometrikus fényesség, sűrűség, színindexek, esetleg tömegvesztés stb.).

Ezután megfelelő tömeg-, fémtartalom- és koreloszlást ($\Phi(M, Z, \tau)$) feltételezve egy tetszőlegesen generált populáció egyedeire, szintetikus log $T_{\rm eff}$ –

log $L$ diagramot konstruálhatunk. Ez már tartalmazni fogja többek között az alapmódusú kék szélre vonatkozó információkat is. Ezután összevethetjük eredményeinket az empirikus úton kapottakkal.

## 4.5. Csillagfejlődési görbék

Az alábbi horizontális-ági fejlődési görbéket hasonlítottam össze, illetve használtam:
– oxigénben gazdag Dorman-féle görbék (Dorman [43]),
– Demarque-féle fejlődési útvonalak (Demarque és társai [41]),
– Padova-számítások (Girardi és társai [53]).

A Dorman- és a Demarque-görbék között csak minimális eltérések vannak. A Demarque- és a Padova-számítások részletes összehasonlítása megtalálható egy cikksorozatban [47], [114], [10]. Itt elég annyit megjegyezni, hogy a Padova-görbék alacsonyabb luminozitásnál és kisebb hőmérsékletnél haladnak. Érdekes, hogy ez kevésbé befolyásolta az alapmódus kék szélét (**4.7.** fejezet), viszont eltérést okoz a kétmódusú csillagok fejlődésének tárgyalásánál (**5.2**. fejezet).

A horizontális ági fejlődési görbék jellegzetes hurkokat írnak le (lásd az **5.1.-5.3.** ábrákat), s ez érdekes jelenségekhez vezet: egy nem pulzáló csillag befejlődhet az instabilitási sávba, vagy éppen elhagyhatja annak bizonyos módushoz, módusokhoz tartozó tartományait (**2.2.** ábra).

Minden fejlődési útvonalat újrainterpoláltam, így állt elő az az adatbázis, amit később ismét interpolálva minden modellcsillaghoz megkaptam annak fizikai paramétereit az adott fejlődési pillanatban. Esetünkben csak az effektív hőmérsékletre, a luminozitásra, valamint a fejlődés irányára, vagyis $(d\,log\,T_{\rm eff}/d\tau)$ előjelére van szükség.

Az eddig tárgyalt csillagfejlődési számításokat az *ún. kanonikus* jelzővel illetik, azonban számos horizontális ági jellegzetesség (főként az extrém /kék/ horizontális ág léte és jellemzői) nem magyarázható ezeken a kereteken belül. Anélkül, hogy a teljes fizikai hátterét ismertetném a viszonylag komplex csillagfejlődési számításoknak, megemlítem, hogy léteznek nemkanonikus számítások is, melyek egy vagy több olyan tényezőt is figyelembe vesznek, melyek biztosan szerepet játszanak az említett jellegzetességek kialakításában, de a kanonikus tárgyalásmódnak nem részei. Ezek fontosságát és nagyságrendjét illetően azonban általában nincs konszenzus az irodalomban. Ilyenek a rotáció, a tömegvesztés, a hélium felkeveredésének mértéke a vörös óriás ágon (RGB), valamint a kezdeti héliumtartalom, illetve ennek időbeli változása egy gömbhalmaz élete során [104], [40]. Minthogy az említett hatások a becslések szerint nem befolyásolják jelentősen a horizontális ág RR Lyrae csillagok által benépesített részének jellemzőit, ezért a továbbiakban ezekkel nem foglalkozunk.

## 4.6. Szintetikus instabilitási sáv

### 4.6.1. Populációszintézis

Minthogy *univerzális* alapmódusú kék szélet szeretnénk előállítani, olyan értelemben, hogy minden szóba jövő tömegű, fémtartalmú és korú RR Lyrae szerepeljen a vizsgálatban, ezért egyenletes eloszlások alkalmazása bizonyult célravezetőnek $M, Z$ és $\tau$ esetében is. Bár különböző tömeg-, kor- és fémtartalom-eloszlás lehetőségét is vizsgáltam, elegendőnek tűnt az egyenletes eloszlások választása. Az indokok között említhetjük azt, hogy nagyon kevés információnk van például a megfigyelt csillagok a tömegeloszlásáról. Másrészt a tömegeloszlás nem sokat változtat az instabilitási sáv határain. A horizontális ág modellezésénél szokásos csonkolt normális eloszlást venni $0{,}02\,\mathrm{M}_\odot$ tömegdiszperzióval [78], [79], [90], [41] ez azonban csak teljes HB modellezésére igaz, nem pedig annak egy kis tartományára, az instabilitási sávra.

A koreloszlásról még kevesebbet tudunk. Az RR Lyrae csillagok relatív fejlettségi szintjét is nehéz elkülöníteni [61], pontos kor (vagy ZAHB-tól eltelt idő) meghatározása egyelőre nem tűnik kivitelezhetőnek.

A fémtartalom olyan kapcsolatban van a luminozitással, hogy alacsonyabb $Z$-hez nagyobb $L$ tartozik (lásd pl. a Dorman-féle fejlődési görbéket [43], vagy a Demarque-görbéken alapuló **4.5**. ábrát). Így ha mindenféle $Z$-értéket bevonunk a vizsgálatba, akkor a teljes $L$-tartományt lefedjük. Az összehasonlítás alapjául szolgáló objektumok [67] természetesen diszkrét objektumok (mezőcsillagok, gömbhalmazbeli csillagok, LMC-beli csillagok stb.). A megfigyelt objektumok fémességeloszlását jól közelíthetjük, ha a $Z$-értékeket a $0{,}0001 - 0{,}004$ intervallumból válogatjuk, s ezzel az *univerzális* kék szél is meghatározható. Az eloszlást olyanra választottam, hogy $Z$ helyett a $[Fe/H]$-eloszlás legyen egyenletes, a kettő között a Dorman-féle kalibrációt alkalmaztam [43]. A határokon túlra nem extrapoláltam, a bizonytalanság csökkentése érdekében.

A vizsgált luminozitástartomány tehát: $1{,}5 < \log L < 1{,}8$ (nagyjából $40\,\mathrm{L}_\odot < L < 60\,\mathrm{L}_\odot$); a tömegintervallum pedig: $0{,}57\,\mathrm{M}_\odot < M < 0{,}87\,\mathrm{M}_\odot$. Az effektív hőmérséklet tartományát a korábbi vizsgálatokkal [67] egyezőnek választottam ($3{,}79 < \log \mathrm{T_{eff}} < 3{,}88$).

Korban (ZAHB-tól eltelt idő) a HB fejlődési út végén az adott fejlődési görbétől függően 90,0-95,0 millió év környékén levágást alkalmaztam, minthogy ezután a csillag hirtelen magas luminozitásúvá válik, tehát elhagyja a vizsgált tartományt, és az interpoláció is bizonytalanabb lesz.

Fontos, hogy a felsorolt szélsőértékek jellemzőek a megfigyelt objektumok paraméter-szélsőértékeire, és konzisztensek a fejlődési görbékből (leginkább a Dorman- és a Demarque-görbékből) és a modellszámításaimból következő határokkal is.

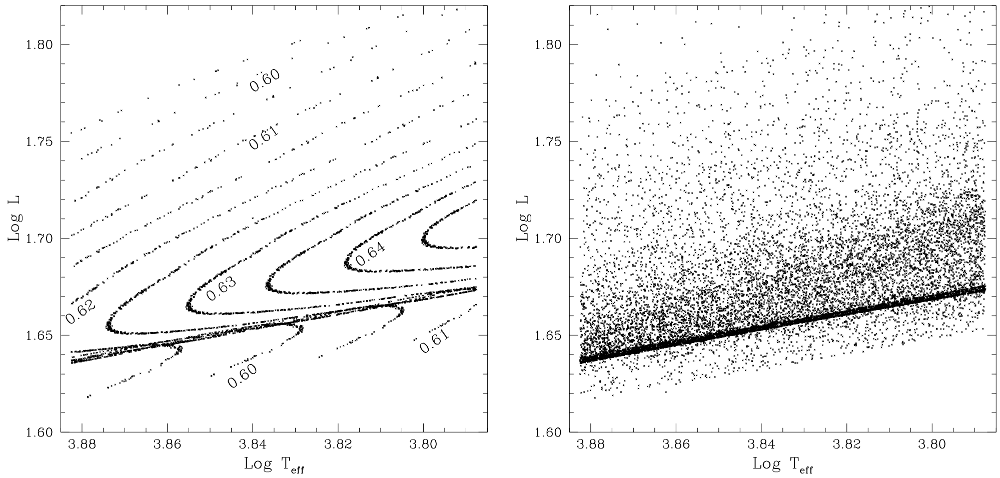
Ezekkel az információkkal felvértezve elméleti $T_{\rm eff} - L$ diagram szerkeszthető, melyen bejelölhetjük az alapmódusban és az első felhangban pulzáló változókat. A pulzációs állapot a mintacsillaghoz tartozó fizikai jellemzők alapján interpolált F/O1, illetve F/DM zónák szélességéből és a fejlődés irányából adódik. Ezen tartományokon kívül a csillagot RRab, RRc vagy RRd csillagnak vettem az effektív hőmérséklete alapján (szintén a megfelelő tartomány szélességének és helyének interpolációja alapján).

Megemlítjük, hogy bár szintetikus HB vizsgálatok természetesen korábban is történtek ([79]), azonban az itt bemutatott, mind a módusszelekciót, mind a horizontális ági fejlődést konzisztens módon figyelembe vevő vizsgálathoz hasonlót nem találtunk az irodalomban [107]. Egy esetben végeztek hasonló RR Lyrae modellszámítás-sorozatot Bono és társai [12] – bár a paramétertartomány szűkebb részére –, de ők nem a kék szélre alkalmazták az eredményeket, hanem az elméleti amplitúdókat és periódusokat hasonlították össze a megfigyeltekkel. Egyébként ez a cikk is felveti a módusszelekció és a csillagfejlődés együttes szerepének fontosságát.

A szintetikus csillagok jó része el fogja kerülni a releváns $T_{\rm eff} - L$ tartományt, vagyis az RR Lyrae instabilitási sávot, de a bemutatott módszer biztosítja, hogy azok és csak azok a csillagok kerüljenek be a vizsgálatba, amelyek a fentebb felsorolt kritériumoknak megfelelnek.

Minthogy az interpoláció simasága, a matematikai módszerek pontossága létfontosságú a pontos IS modellezésben, és az elérhető fejlődési görbék tartalmaznak kisebb ugrásokat is, a görbéket simítottam, és úgy interpoláltam őket. Módszeremmel jó néhány tesztet végeztem; ezek a fejlődési görbék visszaadására, simaságára, illetve a szintetikus horizontális ágak minőségére vonatkoztak. A populációszintézis használhatóságát, illetve pontosságát mutatja a **4.4. ábra**, melyen a horizontális ágnak az instabilitási sávba eső részébe eső görbéket tüntettem fel a Dorman-görbék interpolálásával, az M3 gömbhalmaz esetében [61]. Jobb oldalon a populációszintézis eredménye látható ugyanezekre a görbékre támaszkodva. Jól megfigyelhető a fejlődési görbék sajátosságából adódó sűrűsödés. Ezek az apró jellegzetességek is tökéletes egyezésben vannak hasonló számítások eredményeivel (pl. [22], ahol ráadásul a mienktől eltérő fejlődési görbéket használtak!), ami szintén a módszer megbízhatóságát támasztja alá.

A horizontális ági csillagokra fennálló $Z - L$ és $M - Z$ relációkat természetesen az instabilitási sávban tartózkodó csillagok is öröklik, sőt az empirikus




4.4. ábra. *Balra:* Az M3 gömbhalmaznak megfelelő fémességértékkel ($[Fe/H] = -1{,}49$, $Z = 0{,}0014$) interpolált Dorman-féle fejlődési görbék ($0{,}595\,\mathrm{M}_\odot \leq M \leq 0{,}640\,\mathrm{M}_\odot$). Néhány tömegértéket ($M_\odot$-egységben) megjelöltem. *Jobbra:* Az M3 gömbhalmaz horizontális ágának az instabilitási sáv közelébe eső része a bal oldali görbékre alapuló populációszintézis alapján ($0{,}580\,\mathrm{M}_\odot \leq M \leq 0{,}650\,\mathrm{M}_\odot$).

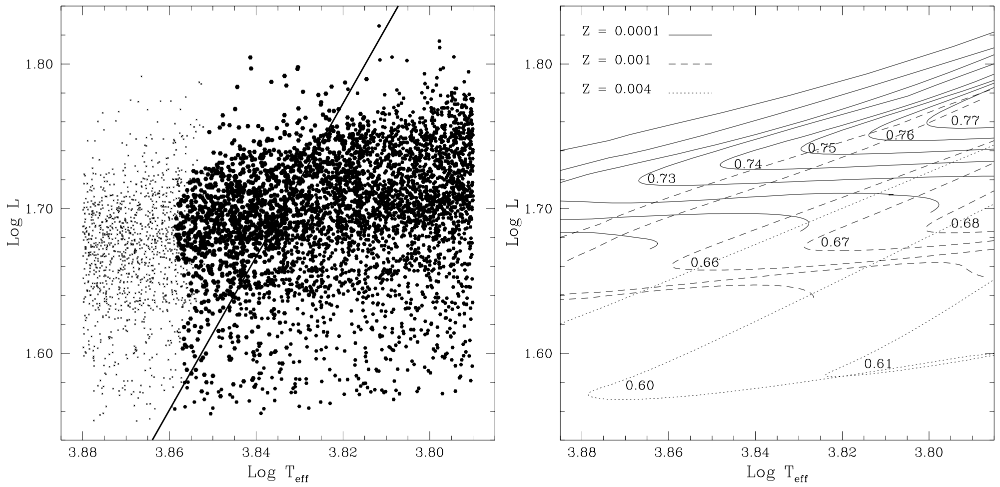
relációk is visszaadják ezeket. További ellenőrzés gyanánt a szintetikus populációkra meghatároztam ezeket az összefüggéseket, és jó egyezést kaptam az irodalomban fellelhető értékekkel [59].

### 4.6.2. Kétmódusú pulzáció

Természetesen a kétmódusú csillagokat is figyelembe kellene venni a populációszintézisnél, hiszen az RRd-k vagy az F és az O1 tartományok között, vagy a F és F/O1 tartományok között helyezkednek el (**3.1.** fejezet). Itt csak annyit jegyzünk meg, hogy a viszonylag keskeny DMR tartomány miatt ezek a csillagok nem módosítják jelentősen sem az F-O1 csillagok arányát, sem elhelyezkedésüknél fogva az instabilitási sáv kék szélét. Másrészt az F/DM zónában csak egy irányban jön létre stabil kétmódusú pulzáció (**5.2.** fejezet), így ez tovább csökkenti az RRd-k számát. Ezért a továbbiakban az F kék szélének meghatározásánál nem foglalkozunk a kétmódusú csillagokkal.

### 4.6.3. A módusváltások időskálája

Két különböző pulzációs mód közötti átmenet (alapmódusból első felhangba, kétmódusúból alapmódusba, belépés az IS-ba stb.) időtartamát, illetve a QSA tárgyalásmódhoz képesti késleltetés ("befagyás") mértékét számszerűen




4.5. ábra. *Balra:* Szintetikus log $T_{\text{eff}}$ − log $L$ diagram, a Demarque-féle fejlődési görbék, és saját modellszámításaim alapján. A fekete pontok alapmódusú csillagokat, a piros körök felhangban pulzálókat jelölnek. A szürke pontok nem pulzáló horizontális ági csillagokat jelentenek. A vastag vonal a megfigyelt kék szélet mutatja. Figyeljük meg a kitűnő egyezést a megfigyelt és a modellezett alapmódusú kék szélek között. Érdemes összehasonlítani a **4.1.** ábrával. *Jobbra:* Az instabilitási sávba fejlődő csillagok tömege különböző fémtartalom esetén, Demarque-féle fejlődést alkalmazva. A jobb áttekinthetőség kedvéért csak néhány görbének tüntettem fel a ZAHB-tól legjobban elfejlődött, vörös felé tartó ágát.

először Buchler és Kolláth [16] vizsgálták az ötödrendű tagokat tartalmazó amplitúdóegyenlet formalizmus segítségével (lásd **2.4.** fejezet, **2.2.** ábra). Így nyert magyarázatot az a régóta ismert megfigyelési tény, hogy az instabilitási sáv szélein hiányoznak a kis amplitúdójú változók. Elsőre úgy gondolhatnánk, hogy ezeket az eredményeket az alapmódusú kék szél meghatározásánál is figyelembe kell vennünk, mert a csillagok ezen átmenetek során nem pulzálnak, vagy megtartják előző pulzációs módusukat. Így a csillagok egy része hiányozna az instabilitási sáv egyes részeiről, vagy eltolódnának a különböző módussal jellemezhető tartományok határai. Azonban az említett jelenségek jellemző időskálái (100–1000 év) sokkal kisebbek, mint az F/O1 zónán való áthaladás tipikus időtartama ($\approx 10^6$ év). Éppen ezért ettől a jelenségtől is eltekinthetünk az alapmódusú kék szél számításánál.

## 4.7. Eredmények

Nincs más hátra, mint alkalmazni az eddig ismertetett módszert, és meghatározni az RR Lyrae instabilitási sáv alapmódusú kék szélét. Így készült a szintetikus log $T_{\text{eff}}$ − log $L$ diagram, melyet példaként mutatok be a **4.5.** áb-

4.1. táblázat. Az RR Lyrae csillagok alapmódusú kék szélének meredeksége különböző módszerekkel, lineáris összefüggést feltételezve. Források: (1): Jurcsik [59], (2): Kolláth és társai [66], (3): Szabó és társai [107]

| módszer | meredekség ($1\sigma$) | forrás |
|---|---|---|
| **empirikus** | **−5,40** | [59] |
| konv., lin. | −13,34 | [66] |
| konv., nemlin., Dorman ev. | −3,91 (0,51) | jelen munka, [107] |
| konv., nemlin., Demarque ev. | −3,96 (0,25) | jelen munka, [107] |
| konv., nemlin., Padova ev. | −4,25 (0,47) | jelen munka, [107] |

rán. A diagram a Demarque-féle fejlődési számításokon és saját, nemlineáris, pulzációs modellszámításaim alapján készült. A fekete pontok alapmódusú csillagokat, a piros körök O1 RR Lyrae csillagokat jelölnek. A szürke pontok nem pulzáló, stabil horizontális ági (forró) csillagok. Az instabilitási sáv empirikus fundamentális kék szélét egyenes átlós vonallal jelöltem. A 45 000 mintacsillagból az ábrán 2679 F, 1455 O1 és további 1457 nem pulzáló csillag látszik. Az alapmódus vörös szélét nem jelöltem, az említett nehézségek miatt (**2.5.** fejezet). Nagyon hasonló topológiát kaptam a Dorman- és Padova-görbékkel is. A **4.5.** ábra jobb oldalán az látható, hogy különböző fémességnél milyen tömegű csillagok tartózkodnak az instabilitási sávban, (szintén a Demarque-görbék alapján.)

Mindhárom rendelkezésre álló fejlődésigörbe-sorozatra 10 000 Monte-Carlo szimulációt végeztem. Ezáltal a módszer stabilitását tudtam tesztelni, és a hibák becslésére is lehetőség adódott. A kék szélet lineárisnak feltételezve egyenest illesztettem az alapmódusban pulzáló csillagok magas hőmérsékletű burkolójához. Kisebb súllyal vettem figyelembe a kilógó pontokat, nagyobb súlyt kaptak a kék szél melletti "normális" pontok. A meredekségek eloszlása (a szélső értékek kivételével) jól közelíthető normális eloszlással. Az illesztett egyenesek meredeksége (várható érték) és szórása ($1\sigma$) a három fejlődésigörbe-sorozatra, illetve a korábbi módszerekkel kapott értékek megtalálhatók a **4.1.** táblázatban.

A módusszelekció és a HB fejlődés számba vételével az egyezés az elméleti és az észlelt meredekség között sokkal jobb, mint amit eddig akár radiatív, akár turbulens pulzációs kóddal el lehetett érni (vö. a **4.1.** ábrával). A Dorman- és Demarque-féle görbék esetében szinte azonos meredekség adódott (-3,91 és -3,96), ami maguknak a görbéknek a topológiai és elhelyezkedésbeli hasonlóságára vezethető vissza. A Padova-görbék eltérésük ellenére is ehhez közeli értéket adtak (-4,25). Különösen örvendetes, hogy az alapmódus kék szélének meredeksége a teljes tartományban jól illeszkedik a megfigyelthez. Meg kell azonban jegyezni, hogy bár a meredekség jó, a dimenziótlan turbulens mennyiségek más választása esetén a teljes IS eltolódást szenvedhet hőmérsékletben (**2.5.** fejezet). A kék széle pozíciójának kiváló egyezése azonban valószínűvé teszi, hogy az $\alpha$-kat jól választottuk meg, esetleg egy rossz választás is szolgáltathat jó végeredményt. Mindez a meredekséget nem érinti.

A csillagok eloszlását is sikerült hozzávetőlegesen jól visszaadni a kék szél mentén, amennyiben alacsony luminozitásnál kisebb a csillagok számsűrűsége, és $\log L = 1{,}68$ körül maximuma van.

## 4.8. Diszkusszió

Modellszámításaim szerint létezik egy kevert terület a $\log T_{\mathrm{eff}} - \log L$ síkon, amely mind RRab, mind pedig RRc csillagokat tartalmaz, feltéve, hogy elegendő számú, különböző fémtartalmú és tömegű csillagot vizsgálunk. Fontos látnunk, hogy elméletileg nem feltétlenül kell elválniuk az RRab és RRc csillagoknak, amikor mindenféle korú és fémtartalmú csillagot bevonunk a vizsgálatba. Ehelyett egy "kevert" zóna jelentkezhet, amiben alapmódusú és felhangban pulzáló csillagok létezhetnek egyidejűleg a HRD-n, hasonlóan, mint ahogy azt a cefeidák esetén látjuk a Magellán-felhőkben [109]. Természetesen ha egy szűkebb populációt vizsgálunk, például egy gömbhalmaz változóit, és egy irányba történik a fejlődés és/vagy nincs hiszterézis, akkor ezt a keveredést nem látjuk, helyette éles választóvonalat kapunk, amint ezt a legtöbb esetben tapasztaljuk is M15: [95], NGC 6934: [63], NGC 5466: [35].

A *megfigyelési oldalról* közelítve az alapmódus kék szélét a megfigyelt RRab csillagok burkolója definiálja. *Elméleti szempontból* az alapmódus kék szélén a F/O1 zóna magasabb hőmérsékletű, míg az O1 zóna vörös szélén a F/O1 zóna alacsonyabb hőmérsékletű határát értjük. Az eddigiek alapján most egy újabb definíciót kell alkalmaznunk, ugyanis a **4.5.** ábrán az alapmódus kék széle szintén az alapmódusban pulzáló csillagok burkolójaként adódik a módusszelekció és a fejlődés együttes hatásának eredményeképp. A precíz definíció tehát ez: **Az RR Lyrae csillagok alapmódusának kék szélén az alapmódusban pulzáló változók magas hőmérsékletű burkolóját értjük, ahol a csillagok pulzációs állapotát a csillagfejlődés és a módusszelekció figyelembevételével kapjuk meg**. A többi határ hasonlóan definiálható. Látható, hogy az IS-val kapcsolatos vizsgálataim még ezt az alapvető kérdést is új megvilágításba helyezték. Más szerzők egyszerűen a korábbi elméleti definíciót alkalmazták; s általában rögzített tömegű, vagy $M$-től független, adott $Z$-re vonatkozó széleket használnak [13], esetleg valamilyen $M - Z$ összefüggést alkalmaznak [67].

Annak demonstrálására, hogy az alapmódus *univerzális* kék szélének kialakításában fontos szerepe jut a kék szél tömeg-, luminozitás- és fémtartalom-függésének is, egyszerű kísérleteket végeztem ugyanazzal a szintetikus populációval (**4.6.** ábra). Csak az F/O1 zóna széleit változtattam (mesterségesen), és egyenletes $Z$-eloszlást választottam az effektusok jobb észrevehetősége érdekében.

1. Az $L, M, Z$ kontrollparaméter-hármastól független F/O1 szélek alkalmazása természetesen nem vezet eredményre. ( **a.) panel**, az F/O1 szélek függőleges kék vonallal jelölve). A felhangban pulzáló csillagok tartománya nem nyúlik el az F/O1 vörös széléig. Ennek oka a $\tau$-ra alkalmazott feltétel (**4.6.1.** fejezet).

2. Ha a megfigyelt kék széllel párhuzamos F/O1 zónát alkalmazunk, akkor sem kapjuk vissza az alapmódusú és felhangban pulzáló modellcsillagok megfelelő eloszlását ( **b.) panel**). Itt tehát $M, Z$-függetlenek az F/O1 zóna szélei, és a luminozitástól való függésük is mesterséges.

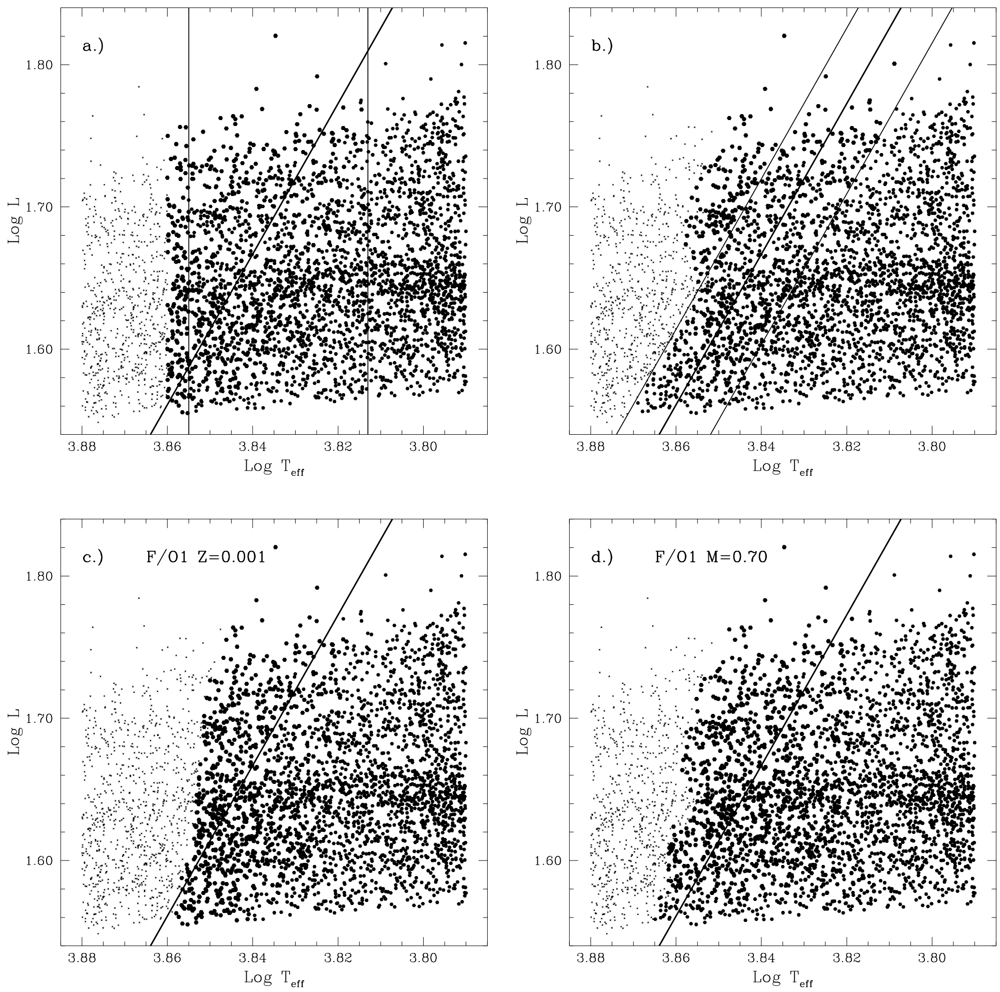
3. Javít a helyzeten, ha a modellekből számolt luminozitás- és tömegfüggést is megengedjük ( **c.) panel**). Itt az F/O1 zóna fémességfüggését hanyagoltuk el, $Z = 0,001$ értéket használva a teljes $Z$-tartományon. Bár az eloszlás közelít a **4.5.** ábrán láthatóhoz, de a kék szél túl meredek. Korábban végzett munkánkban [106] hasonló feltevésekkel éltünk, mivel akkor még nem állt rendelkezésünkre elegendő modell. A nagyszámú, újabb modell alapján világossá vált, hogy a konzisztens leíráshoz a metallicitás okozta hatást is figyelembe kell vennünk a módusszelekcióban [107].

4. Végül ha a tömegfüggést iktatjuk ki pl. M = 0,70 $M_{\odot}$-et választva, és a $Z$- és $L$-függést megengedjük, akkor a **d.)** ábrát kapjuk. Ez szintén jobb leírást ad az első kettőnél, de még mindig nem tökéletes.

Összefoglalva megállapíthatjuk tehát, hogy az RR Lyrae instabilitási sáv alapmódusú kék szélét csak úgy kapjuk vissza, ha a csillagfejlődés és a módusszelekció együttes hatását konzisztensen figyelembe vesszük, és ez utóbbinál a $L, M, Z$ paraméterek szerepétől sem tekintünk el. Megjegyezzük, hogy a fejlődés a cefeida instabilitási sáv szerkezetében is fontos szerepet játszik, amint azt legújabban Cordier és társai [33] is megmutatták.

Az első felhang sávjának kék szélével nem foglalkoztam. Modelljeink nagyobb meredekséget sugallnak, minthogy itt nem működik hiszterézis. Észlelési szempontból kevés a kellő alapossággal megfigyelt csillag ebben a régióban.

Nagyon hasznos lenne, ha RRc csillagokra is rendelkezésre állnának az RRab csillagokéhoz hasonló, a fénygörbe-paraméterek és a fizikai jellemzők közötti empirikus relációk. A nagyléptékű égbolt-felmérő programok melléktermékeként felgyülemlő jó minőségű RR Lyrae fénygörbék (és színinformáció!), fontos kiindulási pontot jelenthetnek az instabilitási sáv további vizsgálatához is. Ezek feldolgozása meghaladja e dolgozat kereteit.




4.6. ábra. Szintetikus $\log T_{\mathrm{eff}} - \log L$ diagramok, a Demarque-féle fejlődési görbék alapján. A jelölések megegyeznek a **4.5. ábráéval**. Az F/O1 tartomány széleinek az $(M, L, Z)$ kontrollparaméter-hármastól való függését mesterségesen megváltoztattam. Az F/O1 szélei **a.)**: $L, M, Z$-függetlenek (kék vonalak); **b.)**: párhuzamosak a megfigyelt kék széllel (kék vonalak); **c.)**: $Z$-függetlenek, $Z = 0,001$; **d.)**: $M$-függetlenek, $M = 0,70\,\mathrm{M}_{\odot}$. A vastag fekete vonal itt is a megfigyelt kék szélet mutatja.

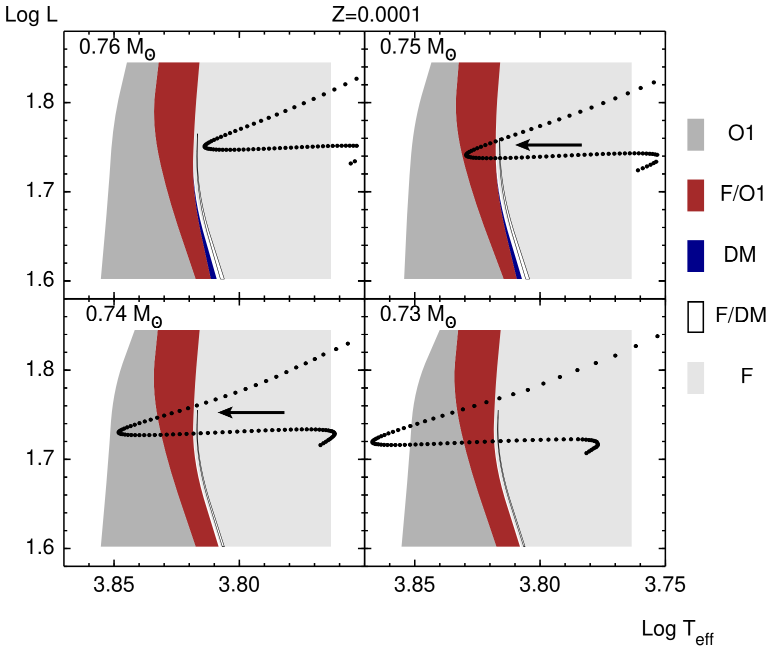
# 5. fejezet

# Kétmódusú RR Lyrae csillagok

## 5.1. Előzmények

A kétmódusú pulzációt RR Lyrae csillagok körében viszonylag későn, a ’70-es évek végén ismerték fel [84]. Ezen objektumok jelentősége abban áll, hogy a pontosan mérhető második periódus további megszorítást ad a csillag szerkezetére vonatkozóan, például a csillag tömegére következtethetünk. Stacionárius kétmódusú pulzációt mutató modelleket azonban – mint arra korábban kitértem – radiatív energiatranszferrel nem sikerült találni. Ebben a turbulens konvekció alkalmazása hozott áttörést. Megemlítendő, hogy minden más (korábbi és azóta megjelent), elméleti vizsgálat nem kétmódusú modellekre épül, hanem azzal a feltételezéssel él, hogy az F és O1 csillagok között találhatóak a kétmódusú csillagok, és fizikai paramétereiket az egy módusban pulzáló csillagok sajátrezgéseinek periódusaihoz történő modellillesztés adja. Ebben a tekintetben a **3.1.** fejezetben bemutatott, illetve az itt tárgyalt eredmények ettől gyökeresen különböznek, minthogy valódi kétmódusú modelleken alapulnak. A már tárgyalt eredményem, miszerint a kétmódusú tartomány az F/O1 zónával osztozik az F és O1 tartomány közötti részen, ha nem is kérdőjelezi meg a nem kétmódusú modelleken nyugvó következtetéseket, de érvényességüket mindenképpen behatárolja – utólag sokszor nehezen nyomon követhető módon.

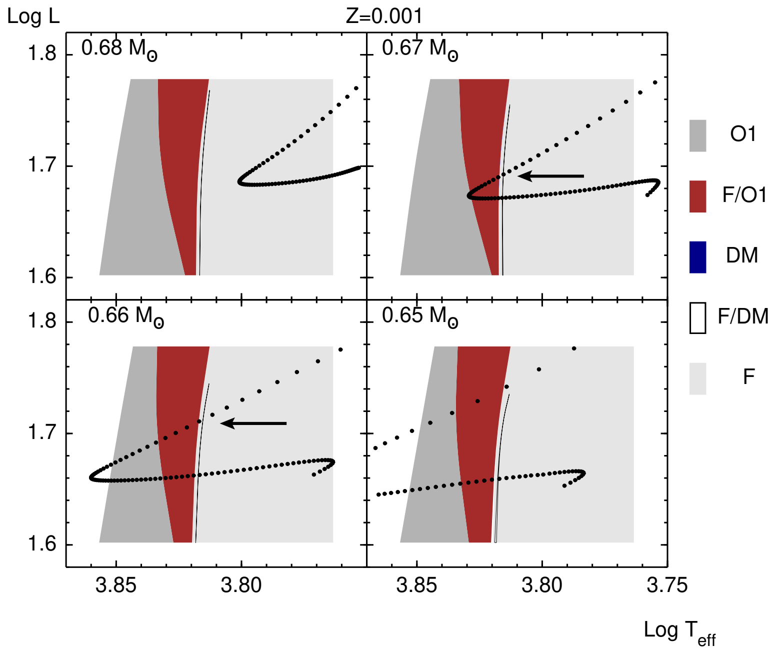
Érdemes kitérni egy szemantikai kérdésre is a kétmódusú RR Lyrae csillagokkal kapcsolatban. Valószínűleg az eddig említett elméleti hiányosságok is közrejátszanak abban, hogy sokszor összemosódik két, elméleti szempontból mindenképpen elkülönítendő csoport: az egyik a valódi kétmódusú csillagok csoportja, vagyis azon csillagoké, melyek stabil kétmódusú fixponttal (is) jellemezhetők, és ennek megfelelően két módusban rezegnek ($DM_{fp}$). A másik csoport a módusváltó csillagok csoportja (F $\rightarrow$ O1 , O1 $\rightarrow$ F) ($DM_{tr}$). Külsőre ezeket nem tudjuk megkülönböztetni, és az egyes csillagok esetén éves időskálán bekövetkező amplitúdóváltozások, tranziens jelenségek, módustartalom-változások is utalhatnak mindkét forgatókönyvre (pl. M3-beli kétmódusú csillagok: [27], [26], [32]). Ráadásul a **2.2.** ábrán hasonló időtartam (4-5,000 év) adódik a két esetre. A következő szakaszban felsorolt bizonytalanságok miatt a $DM_{fp}$ csoportnál ez az időtartam valamivel hosszabb is lehet, így a módusváltás időskáláját kell megbízhatóbbnak tekintenünk. Ekkor viszont a gyors időskálájú események a módusváltást részesítenék előnyben.




5.1. ábra. Kétmódusú modell RR Lyrae csillagok $Z = 0{,}0001$ esetben. Nyíl jelöli azt a helyet, ahol a fejlődési görbék metszik az F/DM tartományt, tehát ahol ténylegesen fellép a kétmódusú pulzáció. Az F/DM tartományt a jobb láthatóság kedvéért kétszer tüntettük fel, egyszer eredeti helyén, másodszor pedig 100 K-nel alacsonyabb hőmérsékletnél. Az alapmódus vörös szélét nem ábrázoltuk. A pontok egyenletes időlépéseket jelölnek.

## 5.2. Kétmódusú pulzáció és csillagfejlődés

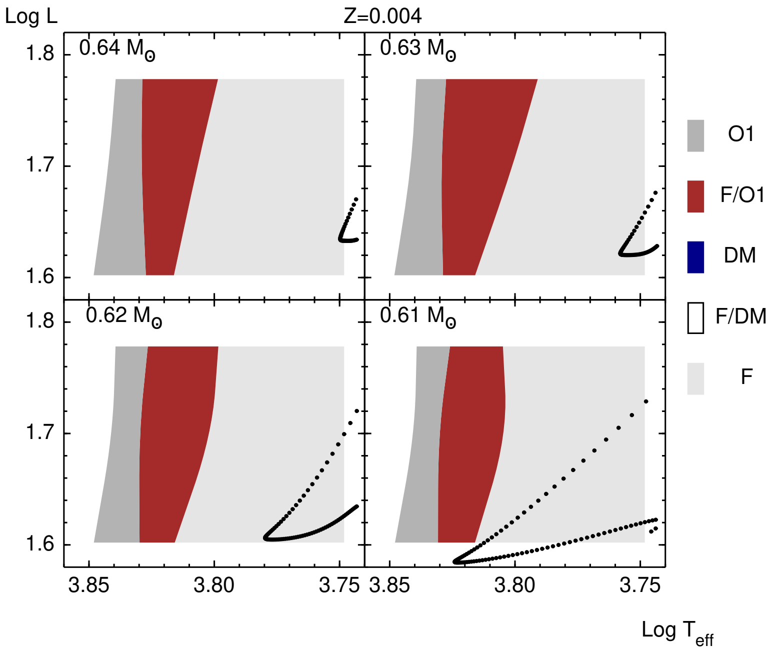
A kétmódusú (F/DM és DM) tartományok jellegzetességeit a **3.1.** fejezetben, a módusszelekciós eredmények ismertetésénél tárgyaltam. Ebben a részben a kétmódusú RR Lyrae pulzáció és a csillagfejlődés kapcsolatát vizsgálom meg. Említettem, hogy a kétmódusú tartomány minden $L, Z$ kombinációra létezik a HRD-n. Másrészről tudjuk, hogy egyes gömbhalmazok tartalmaznak kétmódusú csillagokat, mások pedig nem [28].




5.2. ábra. Kétmódusú modell RR Lyrae csillagok $Z = 0{,}001$ esetben. Nyíl jelöli azt a helyet, ahol a fejlődési görbék metszik az F/DM tartományt, tehát ahol ténylegesen fellép a kétmódusú pulzáció. Az F/DM tartományt a jobb láthatóság kedvéért kétszer tüntettük fel, egyszer eredeti helyén, másodszor pedig 100 K-nel alacsonyabb hőmérsékletnél. Az alapmódus vörös szélét nem ábrázoltuk. A pontok egyenletes időlépéseket jelölnek.

Az **5.1.** ábra rögzített fémtartalom ($Z = 0{,}0001$) esetén kapható $\log T_{\rm eff} - \log L$ diagramot mutat, különböző tömegek esetén. A Demarque-féle fejlődési görbéket is feltüntettem. A választás azért esett rájuk, mert adott paraméterek mellett ezek a legkékebbek (vagyis ezekhez tartozik a magasabb hőmérséklet) a három vizsgált fejlődési görbesereg közül. Nyilakkal jelöltem, ahol a fejlődési görbék metszik az F/DM tartományt, tehát ahol ténylegesen fellép a kétmódusú pulzáció. A Dorman-modellek nagyon közel futnak a Demarque-féléhez, kicsit alacsonyabb hőmérsékletnél, míg a Padova-görbék esetében a különbség fokozottabb, és ezek a görbék nem metszik a modellek által adott kétmódusú tartományokat.

Az **5.1.** ábrán alapján látható, hogy rendkívül keskeny az a tömegtartomány, ahol kétmódusú pulzáció előfordulhat ($M = 0{,}745 \pm 0,010\,\mathrm{M}_\odot$). $Z = 0{,}001$-re a tömegintervallum hasonlóan keskeny, de kisebb tömegnél lesz kétmódusú pulzáció: $M = 0{,}665 \pm 0{,}010\,\mathrm{M}_\odot$, (**5.2.** ábra). $Z = 0{,}004$-re nem kaptunk metszéspontot a kiszámolt kétmódusú tartományokkal (**5.3.** ábra). Az általam talált tendencia nagyon jó egyezésben van Popielski és társai [87] által közzétett eredményekkel, annak ellenére, hogy ők az enyém-



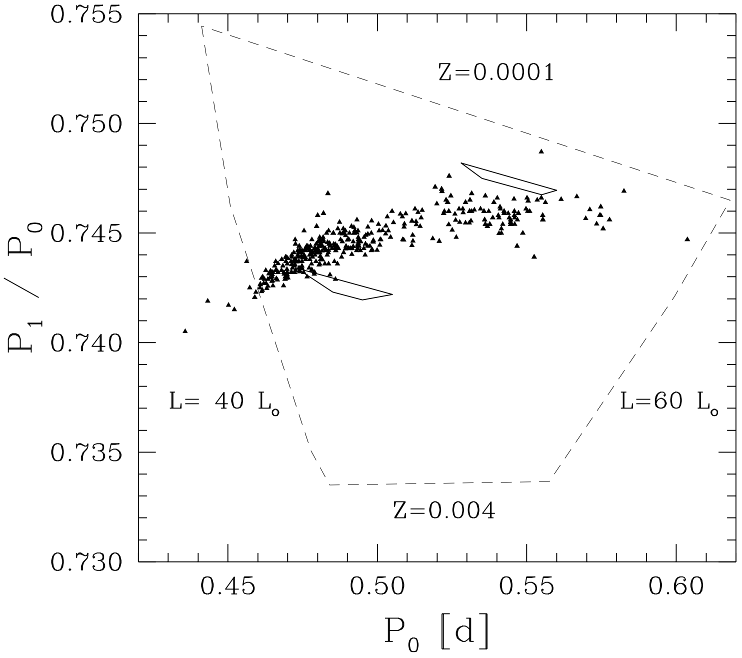

5.3. ábra. A fejlődési görbék nem metszik a kétmódusú tartományt $Z = 0{,}004$ esetben. Az alapmódus vörös szélét nem ábrázoltuk. A pontok egyenletes időlépéseket jelölnek. Az ábrázolt tömegértékeknél esik legközelebb egymáshoz a fejlődési görbe és az F és F/O1 zóna határa. Kétmódusú tartomány csak nagyobb tömegnél található az említett zónák határán.

től eltérő (nem kétmódusú!) pulzációs modelleket és más fejlődési görbéket használtak. A módszerük azon alapszik, hogy a periódusarányokat alapul véve a fejlődési görbékhez tartozó modellek a $P_0 - P_1/P_0$ síkra, azaz a Petersen-diagramra transzformálhatóak. Valamivel nagyobb tömegértékeket és szélesebb határokat kaptak: $M = 0{,}790 - 0{,}855\,\mathrm{M}_\odot$ $Z = 0{,}0001$ esetben és $M = 0{,}640 - 0{,}695\,\mathrm{M}_\odot$ $Z = 0{,}001$-re. Magasabb fémtartalom esetén szintén nem találtak kétmódusú csillagokat, igaz, ilyen nagy fémtartalom nem is várható vizsgálatuk tárgya, azaz a Nagy Magellán-felhő RRd csillagai között.

Ismét hangsúlyozzuk, hogy azzal, hogy valódi, nemlineáris kétmódusú modelljeink vannak, azt az árat kell fizetnünk, hogy csak trendekről beszélhetünk, és nem pontos hőmérsékleti és luminozitáshatárokról. Esetünkben ez azt jelenti, hogy a módusszelekció esetleges csekély változásával is a kétmódusú tömegértékek és az intervallumhatárok is módosulhatnak. Jelesül, ha az F/DM tartomány magasabb luminozitásig terjed, akkor valamivel szélesebb lesz a tömegtartomány, ha pedig hőmérsékletben van eltolódás, akkor a tömegérték nőhet $0{,}01 - 0{,}02\,\mathrm{M}_\odot$-gel.

Fontos megjegyezni, hogy ha csak F/DM típusú kétmódusú tartományunk van, akkor csak a vörös felé tartó fejlődés eredményezhet kétmódusú pulzációt. Annak ellenére, hogy esetünkben kizárólag ez az elrendezés adódott, nem jelenthetjük ki, hogy a kék felé történő, esetleg mindkét irányú fejlődés nem vezethet DM pulzációhoz. Az előbb említett bizonytalanságokat szem előtt tartva, előfordulhat, hogy az instabilitás sáv szerkezete kicsit másként néz ki, és ekkor valódi kétmódusú oszcilláció is létrejöhet, a módusváltásnál esetlegesen kialakuló, átmenetileg mindkét módust tartalmazó pulzáció mellett. Ez ismét jó példája annak, hogy milyen bonyolult és kényes kölcsönhatás működik a módusszelekció és csillagfejlődés között, s éppen ez határozza meg a kétmódusú csillagok lehetséges fizikai paramétereit.

## 5.3. A Petersen-diagram




5.4. ábra. Az összes publikált periódusarányú kétmódusú RR Lyrae csillagot tartalmazó Petersen-diagram. A csillagok adatait a következő forrásokból merítettük: LMC: [3], [2], [99] SMC: [98], Sgr törpegalaxis és Bulge: [38], Sculptor: [72], [62], Draco: [82], IC 4499: [29],[112], M3: [34], M15: [83], [60], [89], M68: [111], galaktikus mező: [48], [30]. A modellparamétereink $(Z, L)$ által meghatározott szélsőértékeket szaggatott vonallal ábrázoltuk. A csillagfejlődést is figyelembe véve erős megkötést kapunk a csillagok lehetséges helyére, amit trapézok jelölnek ($Z$ = 0,0001 a jobb felső, míg $Z$ = 0,001 a bal alsó részen helyezkedik el).

A Petersen-diagram alátámasztja az eddig leírtakat. Az összes elérhető, publikált periódusarányú F - O1 kétmódusú RR Lyrae csillagot feltüntettük az **5.4.** ábrán. Érdekes, hogy maga a módusszelekciós mechanizmus nem ad megszorítást a Petersen-diagramon, amint azt a szaggatott vonalak mutatják. Ez azt jelenti, hogy csupán a kétmódusú modelljeink alapján nem reprodukálható a megfigyelt periódusarány-eloszlás. Azonban ha a fejlődést is segítségül hívjuk, azaz a fejlődési görbék és a kiszámolt kétmódusú tartományok metszéspontjait, pontosabban az így adódó fizikai paramétertartományokat is figyelembe vesszük, akkor a kétmódusú csillagokra kapott, megengedett rész jól illeszkedik a megfigyelt – egyébként nagyon pontosan mérhető – periódus–periódusarány értékekhez. Minthogy a számítási kapacitás csak két fémességértékre tette lehetővé a valóban bekövetkező kétmódusú pulzációt mutató modellek számítását ($Z = 0{,}0001$ és 0,001 trapézokkal jelölve az **5.4.** ábrán), így a megfigyelt eloszlás görbületét sajnos nem tudtam visszaadni, de az illeszkedés nagyon jó. Kiemelendő, hogy ez az első kísérlet a megfigyelt kétmódusú csillagok Petersen-diagramon tapasztalt eloszlásának magyarázatára valódi, nemlineáris kétmódusú modellek alapján.

A $P_0 - P_1/P_0$ diagram jelentősége abban áll, hogy a kétmódusú modellek előtti korszakban kizárólagos diagnosztikus eszköznek számított például a kétmódusú csillagok tömegmeghatározásában. A tömeg és a fémtartalom hasonló hatása a diagramon azonban nehézségeket okozott [87]. Viszont a kétmódusú modellek segítségével ez a degeneráció természetes módon feloldható.

Összegezve: a kétmódusú RR Lyrae csillagok előfordulásának magyarázatához az alábbi tényezőket biztosan figyelembe kell vennie egy konzisztens elméletnek:
– keskeny tömegintervallum adott $Z$-re,
– kis hőmérsékleti tartomány, ebből következően rövid időtartam a lehetséges kétmódusú pulzációhoz,
– nagy fémtartalomnál vizsgálataim szerint a DM tartomány és a fejlődési görbék diszjunktak a HRD-n,
– szükséges a valódi és az átmenetileg két módusban pulzáló csillagok megkülönböztetése, amihez a módusszelekciót a teljes paramétertartományban pontosan ismerni kell (lásd a **3.1.** fejezetet).

# 6. fejezet

# Összefoglalás és kitekintés

A radiálisan pulzáló csillagok teljes, az instabilitási sávon történő fejlődését pulzációs szempontból végigkövető módszert fejlesztettünk ki. Az amplitúdóegyenletekre épülő stratégia nagyon hatékonynak bizonyult, mert szolgáltatja az egyébként nehezen megtalálható, keskeny kétmódusú tartományokat, ezenkívül alkalmazható a tranziens jelenségek (pl. módusváltás) és a még hosszabb (csillagfejlődési) időskálákon végbemenő jelenségek vizsgálatára is.

Nemlineáris, a turbulens konvekcióról is számot adó számítások eredményeit felhasználva részletesen feltérképeztem az RR Lyrae instabilitási sáv szerkezetét. A már ismert alapmódusú, felhangbeli és átmeneti tartomány (F/O1) mellett elsőként vizsgálhattam a kétmódusú tartományokat (DM, F/DM) a csillagok tömege, luminozitása, fémtartalma és effektív hőmérséklete függvényében.

Ezek szerint az RR Lyrae csillagoknál az instabilitási sáv szerkezete kis mértékben változik a fémtartalom függvényében, ami fontos szerepet játszik az alapmódusú kék szél kialakításában. Nagyon fontos, hogy minden $L, M$ pár esetén találunk kétmódusú tartományt a HRD-n. Ez azonban nem jelenti azt, hogy minden ilyen esetben létre is jön a kétmódusú pulzáció. Ez a megfigyeléseknek is ellentmondana. Megmutattam, hogy a valóban létrejövő, valódi kétmódusú pulzáció ($DM_{fp}$) nem magyarázható a csillagfejlődés nélkül.

Fontosnak tartom, hogy eredményeim szerint a tisztán alapmódusú (F) és a tiszta felhang (O1) tartományt kétmódusú, vagy F/O1 zóna választja el, méghozzá úgy, hogy magasabb tömeg esetén mindig kétmódusú, alacsonyabb tömegnél pedig F/O1 zónát találunk adott $L, Z$ pár esetén. A kettőt elválasztó tömegérték, vagyis a minimális kétmódusú tömeg a nagyobb luminozitások felé növekszik.

Az alapmódusban (RRab) és az első felhangban (RRc) pulzáló RR Lyrae csillagok szintetikus $T_{\text{eff}} - L$ diagramját állítottam elő. A turbulens konvekcióval számolt módusszelekció és a csillagfejlődés együttesen megmagyarázzák az alapmódus kék szélének régóta vitatott meredekségét. Eredményeim értelmében a fémesség, a tömeg hatását és a fejlődési effektusokat mind figyelembe kell venni az instabilitási sávok szerkezetének modellezésénél. A meredekség gyakorlatilag független attól, hogy melyik kanonikus fejlődési számítást használtam, és szerencsére a kevéssé ismert tömeg- és koreloszlás sincs jelentős befolyással a kék szél meredekségére.

Modellszámításaim szerint létezik egy kevert terület a $\log T_{\rm eff} - \log L$ síkon, amely mind RRab, mind pedig RRc csillagokat tartalmaz, feltéve, hogy elegendő számú, különböző fémtartalmú és tömegű csillagot vizsgálunk.

Annak demonstrálása, hogy a fejlődési effektusok nélkülözhetetlen elemei az RR Lyrae instabilitási sávok helyes leírásának, független bizonyítékot szolgáltat a horizontális ági fejlődésre, megerősítve ezzel a legújabb csillagfejlődési (HB) számolások eredményeit.

Kiderült, hogy fontos lehet megkülönböztetni a valódi, kétmódusú fixponttal jellemezhető, illetve a módusváltás miatt kétmódusúnak látszó csillagokat. A csillagfejlődés és a kétmódusú pulzáció kapcsolatát vizsgálva megállapítottam, hogy a kétmódusú sáv nemcsak hőmérsékletben, hanem a csillagtömeget tekintve is viszonylag keskeny. Nagyobb fémességnél viszont a fejlődési görbék nem metszik a kétmódusú tartományt, így ott nem várhatunk kétmódusú csillagokat (a módusváltás esetétől eltekintve). Az eredmények összhangban vannak más (nem valódi kétmódusú modelleken alapuló) eredményekkel, s a Petersen-diagram is jól reprodukálható a modelljeim és a csillagfejlődés együttes tárgyalása által.

Végül néhány szót ejtünk az eredmények jelentőségéről és azok alkalmazásainak további lehetőségeiről. Az eddigi eredmények megerősítik a hidrokódba foglalt fizikai elképzelések helyességét. Továbbra is kérdéses, hogy a turbulens konvekció egyszerű leírásában szereplő dimenziótlan paraméterek kalibrálhatók-e úgy, hogy minden megfigyelésből származtatható kritériumnak eleget tegyenek. Ez és más problémák (az alapmódus vörös széle, cefeidák stb.) valószínűleg a turbulens konvekció továbbfejlesztett leírásának integrálását teszik majd szükségessé.

Dolgozatomban az RR Lyrae csillagokra koncentrálva egy példáját részleteztem az amplitúdóegyenlet formalizmus, a numerikus hidrodinamikai szimulációk és az analitikus függvény együttes, rendkívül hatékony alkalmazásának. A módszer alkalmas a pulzáció és a csillagfejlődés együttes, konzisztens kezelésére. A kutatások kiterjesztésének egyik lehetséges iránya a nemkanonikus számításokkal nyerhető horizontális ági fejlődési görbék bevonása a vizsgálatokba.

A kifejlesztett módszer alkalmas a klasszikus, egy, két- vagy akár több radiális módusban pulzáló változócsillagok (cefeidák, $\delta$ Scutik, Mirák, félszabályos csillagok) instabilitási sávjainak vizsgálatára is a megfelelő fejlődési számítások alkalmazásával, és más kézenfekvő általánosítással (pl. amplitúdóegyenletek három módus esetén). A nagy luminozitású, kiterjedt légkörű változók (Mirák, SR-ek) esetén figyelembe kell venni olyan hatásokat, amelyek az RR Lyrae és cefeida csillagoknál nem jelentősek (por hatása a radiatív transzferre stb.), s ez bonyolíthatja a számításokat. Gyakorlati oldalról közelítve azt állapíthatjuk meg, hogy a kivitelezés – főként ha több paraméter bevonása szükséges – ma még inkább sokprocesszoros szuperszámítógép, vagy elosztott számítási kapacitás alkalmazását követeli meg, a nagyszámú modell szükségessége miatt (nem feltétel a párhuzamos végrehajtás). A jövőben a számítási kapacitás növekedésével ez változhat.

Természetesen nemradiális pulzációra is általánosítható például az amplitúdóegyenlet formalizmus, de itt a módszerek alkalmazása terén egyelőre korlátokba ütközünk. Ilyenek nehézséget jelent például a 3D-s, nemlineáris kódok kifejlesztése, vagy hogy nagyon keveset tudunk a nemradiális módusok kiválasztódási mechanizmusáról.

Tervezzük továbbá második felhangban pulzáló RR Lyrae és cefeida modellek vizsgálatát, valamint az O1/O2 kétmódusú pulzáció feltérképezését szintén ezen csillagok esetén. Ilyen objektumokra tekintélyes megfigyelési anyag gyűlt össze, de modellszámításokkal eddig nem sikerült reprodukálni ezeket. A módszer általános voltából adódik, hogy szinte változtatás nélkül vizsgálhatók lesznek ezek a tartományok is.

# Köszönetnyilvánítás

Elsőként szeretném megköszönni témavezetőmnek, Kolláth Zoltánnak mindenre kiterjedő segítségét, biztatását és előrelátó szakmai vezetését. Hálás vagyok kollégáimnak, Csubry Zoltánnak, Jurcsik Johannának, Kovács Gézának, Szabados Lászlónak és Szeidl Bélának szakmai tanácsaikért, értékes észrevételeikért. Köszönetemet fejezem ki a Magyar Tudományos Akadémia Konkoly Thege Miklós Csillagászati Kutatóintézete igazgatójának, Balázs Lajosnak és többi dolgozójának is, akik segítségükkel bármilyen módon hozzájárultak kutatásaim sikeréhez.
Külön köszönöm Robert J. Buchler támogatását, együttműködését és együttgondolkodását, valamint a Floridai Egyetem (Gainesville, USA) Fizikai Tanszékének segítségét, ahol a dolgozat témájával összefüggő számítások egy részét végeztem.
Köszönetet mondok az OTKA (T-026031 és T-038440) támogatásáért.
Végül, de nem utolsósorban megköszönöm Feleségemnek a segítséget, áldozatot és türelmet, amivel a munka kezdete óta a dolgozat befejezéséig mindvégig mellettem állt.

# Rövidítések jegyzéke

A dolgozatban előforduló, leggyakrabban használt rövidítések és magyar megfelelőik:

| **rövidítés** | **angol kifejezés** | **magyar megfelelője** |
|---|---|---|
| AE | amplitude equation | amplitúdóegyenlet |
| AGB | Asymptotic Giant Branch | aszimptotikus óriás ág |
| COROT | COnvection ROtation and planetary Transits | konvekció, rotáció és bolygóátvonulás |
| DM | double-mode | kétmódusú |
| DMR | double-mode region | kétmódusú zóna |
| ESA | European Space Agency | Európai Űrügynökség |
| F | fundamental mode | alapmódus |
| GCVS | General Catalogue of Variable Stars | Változócsillagok Általános Katalógusa |
| HB | Horizontal Branch | horizontális ág |
| HRD | Hertzsprung-Russell Diagram | Hertzsprung–Russell-diagram |
| HST | Hubble Space Telescope | Hubble űrtávcső |
| IS | Instability Strip | instabilitási sáv |
| LMC | Large Magellanic Cloud | Nagy Magellán-felhő |
| MACHO | MAssive Compact Halo Object | nagy tömegű kompakt haló objektum |
| MOST | Microvariability & Oscillation of STars | csillagok mikrovariabilitása és oszcillációja |
| MS | Main Sequence | fősorozat |
| NP | non-pulsating | nem pulzáló |
| O1 | first overtone | első felhang |
| O2 | second overtone | második felhang |
| QSA | quasi-static approximation | kvázi-sztatikus közelítés |
| RGB | Red Giant Branch | vörös óriás ág |
| SDSS | Sloan Digital Sky Survey | Sloan digitális égboltfelmérés |
| SMC | Small Magellanic Cloud | Kis Magellán-felhő |
| SR | SemiRegular variable | félszabályos változócsillag |
| TC | turbulent convective | turbulens konvektív |
| WIRE | Wide-Field Infrared Explorer | nagy látómezejű infravörös felfedező |
| ZAHB | Zero Age Horizontal Branch | nullakorú horizontális ág |

# Irodalomjegyzék


[1] Abazajian, K. – Adelman-McCarthy, J. K. – Agüeros, M. A. – Allam, S. S. – Anderson, S. F. és társaik: The First Data Release of the Sloan Digital Sky Survey, *Astronomical Journal,* 2003, **126**, 2081–2086. o.

[2] Alcock, C. – Allsman, R. – Alves, D. R. – Axelrod, T. – Becker, A. és társaik: The MACHO Project LMC Variable Star Inventory. IX. Frequency Analysis of the First-Overtone RR Lyrae Stars and the Indication for Nonradial Pulsations, *Astrophysical Journal,* 2000, **542**, 257–280. o.

[3] Alcock, C. – Allsman, R. A. – Alves, D. – Axelrod, T. S. – Becker, A. C. és társaik: The MACHO Project LMC Variable Star Inventory III. Multimode RR Lyrae Stars, Distance to the Large Magellanic Cloud, and age of the oldest stars, *Astrophysical Journal,* 1997, **482**, 89–97. o.

[4] Alcock, C. – Allsman, R. A. – Axelrod, T. S. – Benett, D. P. – Cook, K. H. és társaik: The MACHO Project LMC Variable Star Inventory II. LMC RR Lyrae Stars - Pulsational Characteristics and Indications of a Global Youth of the LMC, *Astronomical Journal,* 1996, **111**, 1146–1155. o.

[5] Baglin, A. – Auvergne, M. – Catala, C. – Michel, E. – Goupil, M. J. és társaik: The COROT Mission and its Seismology Programme, *Astronomical Society of the Pacific konferenciasorozat,* 2002, **259**, Radial and Nonradial Pulsations as Probes of Stellar Physics, szerk.: Aerts, C. – Bedding, T. R. – Christensen-Dalsgaard, J., 626–629. o.

[6] Baker, N. – Kippenhahn, R.: The Pulsations of Models of $\delta$ Cephei Stars, *Zeitschrift für Atrophysics,* 1962, **54**, 114–151. o.

[7] Bakos, G. Á. – Jurcsik, J.: The Instability Strip of M3, *Astronomical Society of the Pacific konferenciasorozat,* 2000, **203**, The Impact of Large-Scale Surveys on Pulsating Star Research, szerk.: Szabados, L. – Kurtz, D., 255–256. o.

[8] Benedict, G. F. – McArthur, B. E. – Fredrick, L. W. – Harrison, T. E. – Lee, J. és társaik: Astrometry with the Hubble Space Telescope: A Parallax of the Fundamental Distance Calibrator RR Lyrae, *Astronomical Journal,* 2002, **123**, 473–484. o.

[9] Bersier, D. – Wood, P. R.: Variable Stars in the Fornax Dwarf Galaxy, *Astronomical Journal,* 2002, **123**, 840–847. o.

[10] Bertelli, G. – Nasi, E. – Girardi, L. – Chiosi, C. – Zoccali, M. – Gallart, C.: Testing Intermediate-Age Stellar Evolution Models with VLT Photometry of Large Magellanic Cloud Clusters. III. Padova Results, *Astronomical Journal,* 2003, **125**, 770–784. o.

[11] Bonanos, A. Z. – Stanek, K. Z. – Szentgyorgyi, A. H. – Sasselov, D. D. – Bakos, G. Á.: The RR Lyrae Distance to the Draco Dwarf Spheroidal Galaxy, *Astronomical Journal,* 2004, nyomdában

[12] Bono, G. – Caputo, F. – Castellani, V. – Marconi, M.: Nonlinear Investigation of the Pulsational Properties of RR Lyrae Variables, *Astronomy and Astrophysics Supplement Series,* 1997, **121**, 327–342. o.

[13] Bono, G. – Caputo, F. – Marconi, M.: The Topology of the RR Lyrae Instability Strip and the Oosterhoff Dichotomy, *Astronomical Journal,* 1995, **110**, 2365–2368. o.

[14] Bono, G. – Stellingwerf, R. F.: Pulsation and Stability of RR Lyrae Stars 1: Instability Strip, *Astrophysical Journal Supplement Series,* 1994, **93**, 233–269. o.

[15] Buchler, J. R.: Nonlinear Pulsations of Convective Stellar Models, *Astronomical Society of the Pacific konferenciasorozat,* 2000, **203**, The Impact of Large-Scale Surveys on Pulsating Star Research, szerk.: Szabados, L. – Kurtz, D., 343–355. o.

[16] Buchler, J. R. – Kolláth, Z.: Mode Switching Time-Scales in the Classical Variable Stars, *Astrophysical Journal,* 2002, **573**, 324–329. o.

[17] Buchler, J. R. – Kovács, G.: On the Modal Selection of Radial Stellar Pulsators, *Astrophysical Journal,* 1986, **308**, 661–668. o.

[18] Buzasi, D.: Asteroseismic Results from WIRE, *Astronomical Society of the Pacific konferenciasorozat,* 2002, **259**, Radial and Nonradial Pulsations as Probes of Stellar Physics, szerk.: Aerts, C. – Bedding, T. R. – Christensen-Dalsgaard, J., 616–619. o.

[19] Cacciari, C. – Clementini, G.: Globular Cluster Distances from RR Lyrae Stars, *Lecture Notes in Physics,* 2004, nyomdában

[20] Castellani, M. – Caputo, F. – Castellani, V.: RR Lyrae Variables in Galactic Globular Clusters. I. The Observational Scenario, *Astronomy & Astrophysics,* 2003, **410**, 871–878. o.

[21] Catelan, M.: The Distance Modulus of the Large Magellanic Cloud. Constraints from RR Lyrae Pulsation Properties, *Astronomy & Astrophysics,* 1996, **307**, L13–L16. o.

[22] Catelan, M.: The Evolutionary Status of M3 RR Lyrae Variables: Breakdown of the Canonical Framework? *Astrophysical Journal,* 2004, **600**, 409–418. o.

[23] Catelan, M.: RR Lyrae Variables in Globular Clusters and Nearby Galaxies, 2004, nyomdában

[24] Chaboyer, B. – Demarque, P. – Kernan, P. J. – Krauss, L. M.: The Age of Globular Clusters in Light of Hipparcos: Resolving the Age Problem? *Astrophysical Journal,* 1998, **494**, 96–110. o.

[25] Christy, R. F.: A Study of Pulsation in RR Lyrae Models, *Astrophysical Journal,* 1966, **144**, 108–179. o.

[26] Clement, C. M. – Goranskij, V. P.: The Mode Change of the RR Lyrae Variable V79 in M3, *Astrophysical Journal,* 1999, **513**, 767–774. o.

[27] Clement, C. M. – Hilditch, R. W. – Kaluzny, J. – Rucinski, S. M.: Evolution of Horizontal-branch Stars in Globular Clusters: the Interesting Case of V79 in M3, *Astrophysical Journal,* 1997, **489**, L55–L58. o.

[28] Clement, C. M. – Muzzin, A. – Dufton, Q. – Ponnampalam, T. – Wang, J. és társaik: Variable Stars in Galactic Globular Clusters, *Astronomical Journal,* 2001, **122**, 2587–2599. o.

[29] Clement, C. M. – Nemec, J. M. – Robert, N. – Wells, T. – Dickens, R. J. – Bingham, E. A.: Double-mode RR Lyrae Stars in the Globular Cluster IC 4499, *Astronomical Journal,* 1986, **92**, 825–843. o.

[30] Clementini, G. – Di Tomaso, S. – Di Fabrizio, L. – Bragaglia, A. – Merighi, R. és társaik: CU Comae: A New Field Double-Mode RR Lyrae Variable, the Most Metal-poor Discovered to Date, *Astronomical Journal,* 2000, **120**, 2054–2064. o.

[31] Clementini, G. – Federici, L. – Corsi, C. – Cacciari, C. – Bellazzini, M. – Smith, H. A.: RR Lyrae Variables in the Globular Clusters of M31: A First Detection of Likely Candidates, *Astrophysical Journal Letters,* 2001, **559**, L109–L112. o.

[32] Clementini, G. – Corwin, T. M. – Carney, B. W. – Sumerel, A. N.: Image-Subtraction Photometry of the Globular Cluster M3: Identification of New Double-mode RR Lyrae Stars, *astro-ph/0310485*, 2004

[33] Cordier, D. – Goupil, M. J. – Lebreton, Y.: The Faint Cepheids of the Small Magellanic Cloud: An Evolutionary Selection Effect? *Astronomy & Astrophysics,* 2003, **409**, 491–501. o.

[34] Corwin, T. M. – Carney, B. W. – Allen, D. M.: Double-mode RR Lyrae Variables in the Globular Cluster M3, *Astronomical Journal,* 1999, **117**, 1332-1340. o.

[35] Corwin, T. M. – Carney, B. W. – Nifong, B. G.: BV Photometry of RR Lyrae Variables in the Globular Cluster NGC 5466, *Astronomical Journal,* 1999, **118**, 2875–2887. o.

[36] Cox, J. P.: On Second Helium Ionization as a Cause of Pulsational Instability in Stars, *Astrophysical Journal,* 1963, **138**, 487–536. o.

[37] Cox, J. P.: Recent Progress in Linear and Non-linear Calculations of Radial Stellar Pulsation, *International Astronomical Union Symposium konferenciasorozat*, 1974, **59**, Stellar Instability and Evolution, szerk.: Ledoux, P. – Noels, A. – Rodgers, W. 39–46. o., D.Reidel

[38] Cseresnjes, P.: RR Lyrae Stars in the Sagittarius Dwarf Galaxy: Period Analysis, *Astronomy & Astrophysics,* 2001, **375**, 909–921. o.

[39] Csubry, Z. – Szabó, R. – Kolláth, Z. – Buchler, J. R.: Collective Modeling of Stellar Evolution and Pulsation, *Astronomical Society of the Pacific konferenciasorozat,* 2002, **259**, Radial and Nonradial Pulsations as Probes of Stellar Physics, szerk.: Aerts, C. – Bedding, T. R. – Christensen-Dalsgaard, J., 406–407. o.

[40] D'Antona, F. – Caloi, V. – Montalbán, J. – Ventura, P. – Gratton, R.: Helium Variation due to Self-pollution among Globular Cluster Stars. Consequences on the Horizontal Branch Morphology, *Astronomy & Astrophysics,* 2002, **395**, 69–75. o.

[41] Demarque, P. – Zinn, R. – Lee, Y.-W. – Yi, S.: The Metallicity Dependence of RR Lyrae Absolute Magnitudes from Synthetic Horizontal-branch Models, *Astronomical Journal,* 2000, **119**, 1398–1404. o.

[42] Dolphin, A. E. – Saha, A. – Olszewski, E. W. – Thim, F. – Skillman, E. D. és társaik: Short-period Variable Stars in the M31 Halo, *Astronomical Journal,* 2004, nyomdában

[43] Dorman, B.: Oxygen-enhanced Models for Globular Cluster Stars. III - Horizontal-branch Sequences, *Astrophysical Journal Supplement Series,* 1992, **81**, 221–250. o.

[44] Fernie, J. D.: The Structure of the Cepheid Instability Strip, *Astrophysical Journal,* 1990, **354**, 295–301. o.

[45] Feuchtinger, M. U.: A Nonlinear Model for RR Lyrae Double Mode Pulsation I. The Physical Description, *Astronomy & Astrophysics,* 1998, **337**, L29–L33. o.

[46] Feuchtinger, M. U.: A Nonlinear Convective Model of Pulsating Stars. II. RR Lyrae Stars, *Astronomy & Astrophysics,* 1999, **351**, 103–118. o.

[47] Gallart, C. – Zoccali, M. – Bertelli, G. – Chiosi C. – Demarque, P. és társaik: Testing Intermediate-Age Stellar Evolution Models with VLT Photometry of Large Magellanic Cloud Clusters. I. The Data, *Astronomical Journal,* 2003, **125**, 742–753. o.

[48] Garcia-Melendo, E. – Clement, C. M.: NSV 09295: A Double-mode RR Lyrae Variable, *Astronomical Journal,* 1997, **114**, 1190–1194. o.

[49] Gautschy, A. – Saio, H.: Stellar Pulsations across the HR Diagram. Part 1., *Annual Review of Astronomy and Astrophysics,* 1995, **33**, 75–113. o.

[50] Gautschy, A. – Saio, H.: Stellar Pulsations across the HR Diagram. Part 2., *Annual Review of Astronomy and Astrophysics,* 1996, **34**, 551–606. o.

[51] Gehmeyr, M. – Winkler, K.-H. A.: On a New One-Dimensional Time-Dependent Model for Turbulence and Convection I. A Basic Discussion of the Mathematical Model, *Astronomy & Astrophysics,* 1992, **253**, 92–100. o.

[52] Gehmeyr, M. – Winkler, K.-H. A.: On a New One-Dimensional Time-Dependent Model for Turbulence and Convection II. An Elementary Comparison of the Old and the New Model, *Astronomy & Astrophysics,* 1992, **253**, 101–112. o.

[53] Girardi, L. – Bressan, A. – Bertelli, G. – Chiosi, C.: Evolutionary Tracks and Isochrones for Low- and Intermediate-Mass Stars: From 0.15 to $7\,M_\odot$, and from $Z = 0.0004$ to 0.03, *Astronomy and Astrophysics Supplement,* 2000, **141**, 371–383. o.

[54] Held, E. V. – Clementini, G. – Rizzi, L. – Momany, Y. – Saviane, I. – Di Fabrizio, L.: RR Lyrae Variable Stars in the Dwarf Spheroidal Galaxy Leo I, *Astrophysical Journal,* 2001, **562**, L39–L42. o.

[55] Iben, I. Jr. Globular-cluster Stars: Results of Theoretical Evolution and Pulsation Studies Compared with the Observations, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific,* 1971, **83**, 697–740. o.

[56] Ivezić, Ž. – Goldston, J. – Finlator, K. – Knapp, G. R. – Yanny, B. és társaik: Candidate RR Lyrae Stars Found in Sloan Digital Sky Survey Commissioning Data, *Astronomical Journal,* 2003, **120**, 963–977. o.

[57] Ivezić, Ž. – Lupton, R. – Schlegel, D. – Smolčić V. – Johnston, D. és társaik: Reaching the Edge of the Milky Way Halo with SDSS, *astro-ph/030974,* 2003

[58] Ivezić, Ž. – Lupton, R. – Schlegel, D. – Smolčić V. – Johnston, D. és társaik: Halo Structure Traced by SDSS RR Lyrae, *astro-ph/030975,* 2003

[59] Jurcsik, J.: Fundamental Physical Parameters of RRab Stars, *Astronomy & Astrophysics,* 1998, **333**, 571–582. o.

[60] Jurcsik, J. – Barlai, K.: Period Analysis of Double Mode RR Lyrae Variables in M15, *Astronomical Society of the Pacific konferenciasorozat,* 1990, **11**, Confrontation Between Stellar Pulsation and Evolution, szerk.: Cacciari, C. – Clementini, G., 112–115. o.

[61] Jurcsik, J. – Benkő, J. M. – Bakos, G. Á. – Szeidl, B. – Szabó R.: Detection of the Evolutionary Stages of Variables in M3, *Astrophysical Journal,* 2003, **597**, L49–L52. o.

[62] Kaluzny, J. – Kubiak M. – Szymański, M. – Udalski, A. – Krzemiński, W. – Mateo, M.: OGLE Catalogue of Variable Stars in the Sculptor

Dwarf Spheroidal Galaxy, *Astronomy and Astrophysics Supplement Series,* 1995, **112**, 407–428. o.

[63] Kaluzny, J. – Olech, A. – Stanek, K. Z.: Image-subtraction Photometry of Variable Stars in the Field of the Globular Cluster NGC 6934, *Astronomical Journal,* 2001, **121**, 1533–1550. o.

[64] Kholopov, P. N. – Samus, N. N. – Frolov, M. S. – Goranskij, V. P. – Gorynya, N. A. és társaik: *The Combined General Catalogue of Variable Stars I-III.*, 1995–1998, Nauka.

[65] Kolláth, Z. – Beaulieu, J. P. – Buchler, J. R. – Yecko, P.: Nonlinear Beat Cepheid Models, *Astrophysical Journal Letters,* 1998, **502**, L55–L58. o.

[66] Kolláth, Z. – Buchler, J. R.: Double Mode Stellar Pulsations, *Astrophysics and Space Science Library,* 2000, **257**, Nonlinear Stellar Pulsation, szerk.: Takeuti, M. – Sasselov, D.D., 29–60. o.

[67] Kolláth, Z. – Buchler, J. R. – Feuchtinger, M. U.: RR Lyrae – Theory vs. Observation, *Astrophysical Journal,* 2000, **540**, 468–473. o.

[68] Kolláth, Z. – Buchler, J. R. – Szabó, R. – Csubry, Z.: Nonlinear Beat Cepheid and RR Lyrae Models, *Astronomy & Astrophysics,* 2002, **385**, 932–939. o.

[69] Kovács, G.: Second Overtone RR Lyrae Stars: Do They Exist? *International Astronomical Union Symposium konferenciasorozat*, 1998, **181**, Sounding Solar and Stellar Interiors poszterkiadványa, szerk.: Provost, J. – Schmider, F. X., 231–232. o., Nizza

[70] Kovács, G.: Second Overtone RR Lyrae Stars: First Overtone Variables in Disguise? *Astronomical Society of the Pacific konferenciasorozat,* 1998, **135**, A Half Century of Stellar Pulsation Interpretation: A Tribute to Arthur N. Cox, szerk.: Bradley, P. A. – Guzik, J. A., 52–56. o., San Francisco

[71] Kovács, G.: The Multiperiodic Behavior of RR Lyrae Stars, *Astrophysics and Space Science Library,* 2000, **257**, Nonlinear Stellar Pulsation, szerk.: Takeuti, M. – Sasselov, D.D., 61–101. o., Kluwer

[72] Kovács, G.: On the Double-mode RR Lyrae Variables of the Sculptor Dwarf Galaxy, *Astronomy & Astrophysics,* 2001, **375**, 469–475. o.

[73] Kovács, G. – Jurcsik, J.: On the Light Curve–Luminosity Relation of RR Lyrae Stars, *Astrophysical Journal Letters,* 1996, **466**, L17–L20. o.

[74] Kovács, G. – Jurcsik, J.: Computation of the Distance Moduli of RR Lyrae Stars from their Light and Colour Curves, *Astronomy & Astrophysics,* 1997, **322**, 218–228. o.

[75] Kovács, G. – Walker, A. R.: A Detailed Analysis of Double-mode RR Lyrae Stars: Further Support for a Brighter Luminosity Scale, *Astrophysical Journal,* 1999, **512**, 271–281. o.

[76] Kuhfuß, R.: A Model for Time-dependent Turbulent Convection, *Astronomy & Astrophysics,* 1986, **160**, 116–120. o.

[77] Kurucz, R. L.: Model Atmospheres for G, F, A, B, and O Stars, *Astrophysical Journal Supplement Series,* 1979, **40**, 1–340. o.

[78] Lee, Y.-W. – Demarque, P. – Zinn, R.: The Horizontal-branch Stars in Globular Clusters. II. The Second Parameter Phenomenon, *Astrophysical Journal,* 1990, **350**, 155–172. o.

[79] Lee, Y.-W. – Demarque, P. – Zinn, R.: The Horizontal-branch Stars in Globular Clusters. II. The Second Parameter Phenomenon, *Astrophysical Journal,* 1994, **423**, 248–265. o.

[80] Mackey, A. D. – Gilmore, G. F.: RR Lyrae Stars in Four Globular Clusters in the Fornax Dwarf Galaxy, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society,* 2003, **345**, 747–761. o.

[81] Martínez-Delgado, D. – Aparicio, A. – Gómez-Flechoso, M. Á. – Carrera, R.: Tidal Streams in the Galactic Halo: Evidence for the Sagittarius Northern Stream or Traces of a New Nearby Dwarf Galaxy, *Astrophysical Journal,* 2001, **549**, L199–L202. o.

[82] Nemec, J. M.: Double-mode RR Lyrae Stars in the Draco Dwarf Galaxy, *Astronomical Journal,* 1985, **90**, 204–239. o.

[83] Nemec, J. M.: Double-mode RR Lyrae stars in M15 - Reanalysis, and Experiments with Simulated Photometry, *Astronomical Journal,* 1985, **90**, 240–253. o.

[84] Nemec, J. M. – Wehlau, A. – Oliveira, C. M.: Variable Stars in the Ursa Minor Dwarf Galaxy, *Astronomical Journal,* 1988, **96**, 528–562. o.

[85] Olech, A. – Kaluzny, J. – Thompson, I. B. – Schwarzenberg-Czerny A.: Cluster AgeS Experiment (CASE): RR Lyrae Stars from the Globular Cluster Omega Centauri as Standard Candles, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society,* 2003, **345**, 86–96. o.

[86] Petroni, S. – Bono, G.: Field and Cluster RR Lyrae stars as Stellar Tracers, *Memorie della Società Astronomica Italiana,* 2003, **74**, 915–919. o.

[87] Popielski, B. L. – Dziembowski, W. A. – Cassisi, S.: Petersen Diagram for RRd Stars in the Magellanic Clouds, *Acta Astronomica,* 2000, **50**, 491–507. o.

[88] Pritzl, B. J. – Armandroff, T. E. – Jacoby, G. H. – Da Costa, G. S.: The Dwarf Spheroidal Companions to M31: Variable Stars in Andromeda VI, *Astronomical Journal,* 2002, **124**, 1464–1485. o.

[89] Purdue, P. – Silbermann, N. A. – Gay, P. – Smith, H. A.: Double-mode RR Lyrae Stars in the Globular Cluster M15, *Astronomical Journal,* 1995, **110**, 1712–1721. o.

[90] Rood, R. T.: The RR Lyrae, *Astronomical Society of the Pacific konferenciasorozat,* 1990, **11**, Confrontation Between Stellar Pulsation and Evolution, szerk.: Cacciari, C. – Clementini, G., 11–21. o.

[91] Roxburgh, I. – Favata, F.: The Eddington Mission, *Astrophysics and Space Science,* 2003, **284**, 17–19. o.

[92] Sandage, A.: The Oosterhoff Period-Metallicity Relation for RR Lyrae Stars at the Blue Fundamental Edge of the Instability Strip I., *Astronomical Journal,* 1993, **106**, 687–702. o.

[93] Sandage, A.: Temperature, Mass and Luminosity of RR Lyrae Stars as Functions of Metallicity at the Blue Fundamental Edge II., *Astronomical Journal,* 1993, **106**, 703–715. o.

[94] Siegel, M. H. – Majewski, S. R.: Exploring the Leo II Dwarf Spheroidal Galaxy. I. The Variable Star Content, *Astronomical Journal,* 2000, **120**, 284–297. o.

[95] Silbermann, N. A. – Smith, H. A.: The RR Lyrae Variable Stars in the Globular Cluster M15, *Astronomical Journal,* 1995, **110**, 704–728. o.

[96] Simon, N. R. – Clement, C. M.: A Provisional RR Lyrae Distance Scale, *Astrophysical Journal,* 1993, **410**, 526–533. o.

[97] Smith, H. A.: RR Lyrae Stars, *Cambridge Astrophysics sorozat* **27**, 1995, Cambridge, Nagy-Britannia

[98] Soszynski, I. – Udalski, A. – Szymanski, M. – Kubiak, M. – Pietrzynski, G. és társaik: The Optical Gravitational Lensing Experiment. Catalog of RR Lyrae Stars from the Small Magellanic Cloud, *Acta Astronomica,* 2002, **52**, 369–396. o.

[99] Soszynski, I. – Udalski, A. – Szymanski, M. – Kubiak, M. – Pietrzynski, G. és társaik: The Optical Gravitational Lensing Experiment. Catalog of RR Lyrae Stars from the Large Magellanic Cloud, *Acta Astronomica,* 2003, **53**, 93–116. o.

[100] Stellingwerf, R. F.: The Calculation of Periodic Pulsations of Stellar Models, *Astrophysical Journal,* 1974, **192**, 139–144. o.

[101] Stellingwerf, R. F.: Convection in Pulsating Stars III. The RR Lyrae Instability Strip, *Astrophysical Journal,* 1984, **277**, 322-326. o.

[102] Stellingwerf, R. F. – Gautschy, A. – Dickens, R. J.: Overtone Pulsation in Stars, *Astrophysical Journal,* 1987, **313**, L75–L79. o.

[103] Stothers, R. B.: Second-overtone Models of RR Lyrae Stars, *Astrophysical Journal,* 1987, **319**, 260–263. o.

[104] Sweigart, A. V. – Catelan, M.: The Second-parameter Effect in Metal-rich Globular Clusters, *Astrophysical Journal,* 1998, **501**, L63–L66. o.

[105] Szabados, L. – Kurtz, D. W. (szerk.): The Impact of Large-scale Surveys on Pulsating Star Research, *Astronomical Society of the Pacific konferenciasorozat,* 2000, **203**

[106] Szabó, R. – Csubry, Z. – Kolláth, Z. – Buchler, J. R.: Synthetic RR Lyrae Instability Strips, *Astronomical Society of the Pacific konferenciasorozat,* 2002, **259**, Radial and Nonradial Pulsations as Probes of Stellar Physics, szerk.: Aerts, C. – Bedding, T. R. – Christensen-Dalsgaard, J., 404–405. o.

[107] Szabó, R. – Kolláth, Z. – Buchler, J. R.: The RR Lyr Fundamental Blue Edge: Puzzle Resolved. Automated Nonlinear Stellar Pulsation Calculations, *Astronomy & Astrophysics,* 2004

[108] Tuggle, R. S. – Iben, I. Jr.: On the Location of Pulsational Blue Edges and Estimates of the Luminosity and Helium Content of RR Lyrae Stars, *Astrophysical Journal,* 1972, **178**, 455–466. o.

[109] Udalski, A. – Soszynski, I. – Szymanski, M. – Kubiak, M. – Pietrzynski, G. és társaik: The Optical Gravitational Lensing Experiment. Cepheids in the Magellanic Clouds. I. Double-Mode Cepheids in the Small Magellanic Cloud, *Acta Astronomica,* 1999, **49**, 1–44. o.

[110] van Albada, T. S. – Baker, N.: On the Two Oosterhoff Groups of Globular Clusters, *Astrophysical Journal,* 1973, **185**, 477–498. o.

[111] Walker, A. R.: BVI CCD Photometry of Galactic Globular Clusters II. M68, *Astronomical Journal,* 1994, **108**, 555-586. o.

[112] Walker, A. R. – Nemec, J. M.: CCD Photometry of Galactic Globular Clusters III. IC 4499, *Astronomical Journal,* 1996, **112**, 2026–2052. o.

[113] Walker, G. – Matthews, J. – Kuschnig, R. – Johnson, R. – Rucinski, S.: The MOST Asteroseismology Mission: Ultraprecise Photometry from Space, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific,* 2003, **115**, 1023–1035. o.

[114] Woo, J-H. – Gallart, C. – Demarque, P. – Yi, S. – Zoccali, M.: Testing Intermediate-Age Stellar Evolution Models with VLT Photometry of Large Magellanic Cloud Clusters. II. Analysis with the Yale Models, *Astronomical Journal,* 2003, **124**, 754–769. o.

[115] Wuchterl, G. – Feuchtinger, M. U.: A Simple Convection Model for Selfgravitating Fluid Dynamics. Time-dependent Convective Energy Transfer in Protostars and Nonlinear Stellar Pulsations, *Astronomy & Astrophysics,* 1998, **340**, 419–430. o.

# Ábrák jegyzéke

# Függelék

6.1. táblázat. Az RR Lyrae csillagok pulzációs módusainak elméleti hőmérsékleti határai $Z = 0{,}0001$ esetén. A "-" jel azt jelenti, hogy a módus nem létezik az adott paraméterek mellett. A hőmérséklet Kelvinben értendő. Egyéb jelölések a szokásosak.

| $L$ | $M$ | F | | O1 | | F/O1 | | DM | | F/DM | | F | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_\odot$ | $M_\odot$ | $K$ | | $K$ | | $K$ | | $K$ | | $K$ | | $K$ | |
| **Z = 0,0001** | | | | | | | | | | | | | |
| 70 | 0,82 | – | – | 6990 | 6750 | 6750 | 6532 | – | – | – | – | 6532 | 5416 |
| 70 | 0,77 | – | – | 7012 | 6790 | 6790 | 6544 | – | – | – | – | 6544 | 5390 |
| 70 | 0,71 | – | – | 6878 | 6804 | 6804 | 6536 | – | – | – | – | 6536 | 5360 |
| 70 | 0,65 | – | – | 6912 | 6796 | 6796 | 6501 | – | – | – | – | 6501 | 5324 |
| 60 | 0,87 | – | – | 7065 | 6600 | 6600 | 6440 | – | – | 6440 | 6425 | 6425 | 5493 |
| 60 | 0,82 | – | – | 7110 | 6695 | 6695 | 6507 | – | – | 6507 | 6505 | 6505 | 5472 |
| 60 | 0,77 | – | – | 7090 | 6801 | 6801 | 6563 | – | – | – | – | 6563 | 5449 |
| 60 | 0,71 | – | – | 7086 | 6850 | 6850 | 6579 | – | – | – | – | 6579 | 5418 |
| 60 | 0,65 | – | – | 7045 | 6876 | 6876 | 6586 | – | – | – | – | 6586 | 5383 |
| 60 | 0,60 | – | – | 6975 | 6882 | 6882 | 6577 | – | – | – | – | 6577 | 5350 |
| 60 | 0,55 | – | – | – | – | 6924 | 6418 | – | – | – | – | 6418 | 5317 |
| 60 | 0,50 | 6816 | 6634 | – | – | 6634 | 6200 | – | – | – | – | 6200 | 5277 |
| 50 | 0,87 | – | – | 7075 | 6376 | – | – | 6376 | 6346 | 6346 | 6298 | 6298 | 5561 |
| 50 | 0,82 | – | – | 7047 | 6534 | 6534 | 6440 | – | – | 6440 | 6404 | 6404 | 5540 |
| 50 | 0,77 | – | – | 7135 | 6668 | 6668 | 6517 | – | – | 6517 | 6503 | 6503 | 5513 |
| 50 | 0,71 | – | – | 7100 | 6813 | 6813 | 6600 | – | – | – | – | 6600 | 5487 |
| 50 | 0,65 | – | – | 7115 | 6894 | 6894 | 6448 | – | – | – | – | 6448 | 5453 |
| 50 | 0,60 | – | – | 7080 | 6924 | 6924 | 6640 | – | – | – | – | 6640 | 5421 |
| 50 | 0,55 | – | – | 7020 | 6938 | 6938 | 6646 | – | – | – | – | 6646 | 5384 |
| 50 | 0,50 | – | – | 6930 | 6923 | 6923 | 6300 | – | – | – | – | 6300 | 5349 |
| 40 | 0,87 | – | – | 7150 | 6358 | – | – | 6358 | 6144 | – | – | 6144 | 5645 |
| 40 | 0,82 | – | – | 7136 | 6386 | – | – | 6386 | 6272 | 6272 | 6270 | 6270 | 5624 |
| 40 | 0,77 | – | – | 7120 | 6446 | – | – | 6446 | 6362 | 6362 | 6338 | 6338 | 5601 |
| 40 | 0,71 | – | – | 7210 | 6700 | 6700 | 6518 | – | – | 6518 | 6500 | 6500 | 5569 |
| 40 | 0,65 | – | – | 7220 | 6862 | 6862 | 6632 | – | – | 6632 | 6625 | 6625 | 5540 |
| 40 | 0,60 | – | – | 7210 | 6930 | 6930 | 6706 | – | – | – | – | 6706 | 5506 |
| 40 | 0,55 | – | – | 7145 | 6966 | 6966 | 6730 | – | – | – | – | 6730 | 5473 |
| 40 | 0,50 | – | – | 7110 | 6990 | 6990 | 6719 | – | – | – | – | 6719 | 5433 |

6.2. táblázat. Az RR Lyrae csillagok pulzációs módusainak elméleti hőmérsékleti határai $Z = 0{,}001$ esetben. A "-" jel azt jelenti, hogy a módus nem létezik az adott paraméterek mellett. A hőmérséklet Kelvinben értendő. Egyéb jelölések a szokásosak.

| $L$ | $M$ | F | | O1 | | F/O1 | | DM | | F/DM | | F | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_\odot$ | $M_\odot$ | $K$ | | $K$ | | $K$ | | $K$ | | $K$ | | $K$ | |
| | | | | | | **Z = 0,001** | | | | | | | |
| 60 | 0,87 | – | – | 7040 | 6508 | 6508 | 6448 | – | – | 6448 | 6430 | 6430 | 5454 |
| 60 | 0,82 | – | – | 7085 | 6634 | 6634 | 6492 | – | – | – | – | 6492 | 5431 |
| 60 | 0,77 | – | – | 7036 | 6740 | 6740 | 6510 | – | – | – | – | 6510 | 5406 |
| 60 | 0,71 | – | – | 7006 | 6800 | 6800 | 6506 | – | – | – | – | 6506 | 5373 |
| 60 | 0,65 | – | – | 6966 | 6819 | 6819 | 6496 | – | – | – | – | 6496 | 5336 |
| 60 | 0,60 | – | – | 6954 | 6844 | 6844 | 6480 | – | – | – | – | 6480 | 5300 |
| 60 | 0,55 | – | – | – | – | 6888 | 6400 | – | – | – | – | 6400 | 5259 |
| 60 | 0,50 | 6850 | 6650 | – | – | 6650 | 6250 | – | – | – | – | 6250 | 5215 |
| 50 | 0,87 | – | – | 7048 | 6388 | – | – | 6388 | 6275 | – | – | 6275 | 5523 |
| 50 | 0,82 | – | – | 7060 | 6447 | – | – | 6447 | 6428 | 6428 | 6409 | 6409 | 5502 |
| 50 | 0,77 | – | – | 7100 | 6579 | 6579 | 6512 | – | – | 6512 | 6508 | 6508 | 5479 |
| 50 | 0,71 | – | – | 7108 | 6750 | 6750 | 6562 | – | – | – | – | 6562 | 5444 |
| 50 | 0,65 | – | – | 7066 | 6838 | 6838 | 6584 | – | – | – | – | 6584 | 5409 |
| 50 | 0,60 | – | – | 7040 | 6870 | 6870 | 6558 | – | – | – | – | 6558 | 5374 |
| 50 | 0,55 | – | – | 6990 | 6890 | 6890 | 6300 | – | – | – | – | 6300 | 5338 |
| 50 | 0,50 | – | – | 6940 | 6916 | 6916 | 6050 | – | – | – | – | 6050 | 5294 |
| 40 | 0,87 | – | – | 7075 | 6348 | – | – | 6348 | 6120 | – | – | 6120 | 5608 |
| 40 | 0,82 | – | – | 7106 | 6389 | – | – | 6389 | 6176 | – | – | 6176 | 5589 |
| 40 | 0,77 | – | – | 7190 | 6440 | – | – | 6440 | 6307 | 6307 | 6305 | 6305 | 5566 |
| 40 | 0,71 | – | – | 7188 | 6545 | 6545 | 6523 | – | – | 6523 | 6518 | 6518 | 5535 |
| 40 | 0,65 | – | – | 7190 | 6750 | 6750 | 6613 | – | – | – | – | 6613 | 5500 |
| 40 | 0,60 | – | – | 7164 | 6860 | 6860 | 6652 | – | – | – | – | 6652 | 5468 |
| 40 | 0,55 | – | – | 7127 | 6916 | 6916 | 6640 | – | – | – | – | 6640 | 5432 |
| 40 | 0,50 | – | – | 7080 | 6946 | 6946 | 6623 | – | – | – | – | 6623 | 5391 |

6.3. táblázat. Az RR Lyrae csillagok pulzációs módusainak elméleti hőmérsékleti határai $Z = 0{,}004$ esetben. A "-" jel azt jelenti, hogy a módus nem létezik az adott paraméterek mellett. A hőmérséklet Kelvinben értendő. Egyéb jelölések a szokásosak.

| $L$ | $M$ | F | | O1 | | F/O1 | | DM | | F/DM | | F | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_\odot$ | $M_\odot$ | $K$ | | $K$ | | $K$ | | $K$ | | $K$ | | $K$ | |
| **Z = 0,004** | | | | | | | | | | | | | |
| 70 | 0,85 | – | – | 6937 | 6617 | 6617 | 6399 | – | – | – | – | 6399 | 5249 |
| 70 | 0,77 | – | – | 6896 | 6671 | 6671 | 6346 | – | – | – | – | 6346 | 5196 |
| 70 | 0,71 | – | – | 6869 | 6716 | 6716 | 6000 | – | – | – | – | 6000 | 5153 |
| 60 | 0,85 | – | – | 6986 | 6510 | 6510 | 6423 | – | – | – | – | 6423 | 5325 |
| 60 | 0,77 | – | – | 6964 | 6674 | 6674 | 6448 | – | – | – | – | 6448 | 5276 |
| 60 | 0,71 | – | – | 6930 | 6731 | 6713 | 6420 | – | – | – | – | 6420 | 5232 |
| 60 | 0,65 | – | – | 6908 | 6754 | 6754 | 5900 | – | – | – | – | 5900 | 5186 |
| 60 | 0,60 | – | – | 6900 | 6700 | 6700 | 6500 | – | – | – | – | 6500 | 5139 |
| 60 | 0,55 | – | – | – | – | 6820 | 6200 | – | – | – | – | 6200 | 5085 |
| 60 | 0,50 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 6740 | 5025 |
| 50 | 0,85 | – | – | 7008 | 6378 | – | – | 6378 | 6295 | – | – | 6295 | 5412 |
| 50 | 0,77 | – | – | 7015 | 6519 | 6519 | 6471 | – | – | 6471 | 6469 | 6469 | 5367 |
| 50 | 0,71 | – | – | 6988 | 6684 | 6684 | 6488 | – | – | – | – | 6488 | 5326 |
| 50 | 0,65 | – | – | 6966 | 6742 | 6742 | 6480 | – | – | – | – | 6480 | 5281 |
| 50 | 0,60 | – | – | 6918 | 6780 | 6780 | 6100 | – | – | – | – | 6100 | 5238 |
| 50 | 0,55 | – | – | 6973 | 6830 | 6830 | 6200 | – | – | – | – | 6200 | 5189 |
| 50 | 0,50 | – | – | 6866 | 6850 | 6850 | 6300 | – | – | – | – | 6300 | 5130 |
| 40 | 0,85 | – | – | 7054 | 6320 | – | – | 6320 | 6100 | – | – | 6100 | 5512 |
| 40 | 0,77 | – | – | 7048 | 6409 | – | – | 6409 | 6258 | – | – | 6258 | 5468 |
| 40 | 0,71 | – | – | 7060 | 6492 | – | – | 6492 | 6461 | – | – | 6461 | 5435 |
| 40 | 0,65 | – | – | 7050 | 6693 | 6693 | 6549 | – | – | – | – | 6549 | 5391 |
| 40 | 0,60 | – | – | 7040 | 6784 | 6784 | 6557 | – | – | – | – | 6557 | 5352 |
| 40 | 0,55 | – | – | 6992 | 6822 | 6822 | 6600 | – | – | – | – | 6600 | 5308 |
| 40 | 0,50 | – | – | 6972 | 6846 | 6846 | 6200 | – | – | – | – | 6200 | 5255 |